

UNIVERSITE DE NANCY

FACULTE DES SCIENCES

T H E S E S

présentées à la

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE NANCY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ès SCIENCES PHYSIQUES

par

Henri FOUSSE

-:-:-:-:-

1ère thèse : La fonction de transfert des fréquences spatiales en
apodisation.

2ème thèse : Propositions données par la Faculté.

Soutenues publiquement le 28 juin 1966 devant la Commission d'examen.

M. H. BIZETTE

Président

Mme B. ROIZEN-DOSSIER

M. F. SUHNER

Examineurs

UNIVERSITE DE NANCY

FACULTE DES SCIENCES

T H E S E S

présentées à la

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE NANCY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ès SCIENCES PHYSIQUES

par

Henri FOUSSE

1ère thèse : La fonction de transfert des fréquences spatiales en apodisation.

2ème thèse : Propositions données par la Faculté.

Soutenues publiquement le 28 juin 1966 devant la Commission d'examen.

M. H. BIZETTE

Président

Mme B. ROIZEN-DOSSIER

M. F. SUHNER

Examineurs

THÈSE

présentée à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE NANCY

pour obtenir

le grade de DOCTEUR en SCIENCES PHYSIQUES

par

Henri Fournier



Le Président de l'Université de Nancy, M. le Recteur, a autorisé la présente thèse à être imprimée.

Le Vice-Recteur, M. le Doyen de la Faculté des Sciences, a autorisé la présente thèse à être imprimée.

Le Doyen de la Faculté des Sciences, M. le Doyen, a autorisé la présente thèse à être imprimée.

M. le Doyen de la Faculté des Sciences, M. le Doyen, a autorisé la présente thèse à être imprimée.

DOYEN : M. AUBRY

ASSESSEUR : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT - DELSARTE - URION - ROUBAULT.

Professeurs honoraires : MM. CROZE - RAYBAUD - LAFFITTE - LERAY - JULY - LAPORTE - EICHHORN - GODEMENT - DUBREUIL - L. SCHWARTZ - DIEUDONNE - DE MALLEMANN - LONGCHAMON - LETORT - DODE - GAUTHIER - GOUDET - OLMER - CORNUBERT - CHAPELLE - GUERIN - WAHL.

Maîtres de conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRET.

Professeurs

MM. URION	Chimie biologique	MALAPRADE	Chimie
DELSARTE	Analyse supérieure	MANGENOT	Botanique
ROUBAULT	Géologie	GAYET	Physiologie
CAPELLE	Mécanique rationnelle	BONVALET	Mécanique appliquée
VEILLET	Biologie animale	HADNI	Physique
BARRIOL	Chimie théorique	BASTICK	Chimie
BIZETTE	Physique	KERN	Minéralogie
GUILLIEN	Electronique	DUCHAUFOR	Pédologie
GIBERT	Chimie physique	GARNIER	Agronomie
LEGRAS	Mécanique rationnelle	WEPPE	Minéralogie appliquée
BOLFA	Minéralogie et cristallographie		
NICLAUSE	Chimie	NEEL	Chimie organique indust.
FAIVRE	Physique appliquée	BERNARD	Géologie appliquée
AUBRY	Chimie minérale	CHAMPIER	Physique
COPPENS	Radiogéologie	GAY	Chimie biologique
DUVAL	Chimie	REGNIER	Physico-chimie
FRUHLING	Physique	STEPHAN	Zoologie
HILLY	Géologie	CONDE	Zoologie
LE GOFF	Génie Chimique	WERNER	Botanique
SUHNER	Physique expérimentale	EYMARD	Calcul différentiel et in
CHAPON	Chimie biologique	LEVISALLES	Chimie organique
HEROLD	Chimie minérale industrielle		Méthodes mathématique de
SCHWARTZ B.	Exploitation minière	Mme HERVE	la physique
FELDEN	Physique	GOSSE	Mécanique physique

Maîtres de conférence

Mme BASTICK	Chimie M.P.C. (Epinal)	Mle HUET	Mathématiques S.P.C.N.
MM. GUDEFIN	Physique	VIGNES	Métallurgie
ROCCI	Géologie	BALESDENT	Thermodynamique Chi. App.
VUILLAUME	Psychophysiologie	BLAZY	Minéralogie appliquée
FRENTZ	Biologie animale	JANOT	Physique MPC (Epinal)
HORN	Physique propédeutique	JACQUIN	Pédologie et chimie agric
LAFON	Physique (I.S.I.N.)	MAINARD	Physique M.G.P.
MARI	Chimie (I.S.I.N.)	CACHAN	Entomologie appliquée
AUROUZE	Géologie	MARTIN	Chimie M.P.C.
DEVIOT	Physique du solide	PAULMIER	Mécanique expérimentale
FLECHON	Physique M.P.C.		

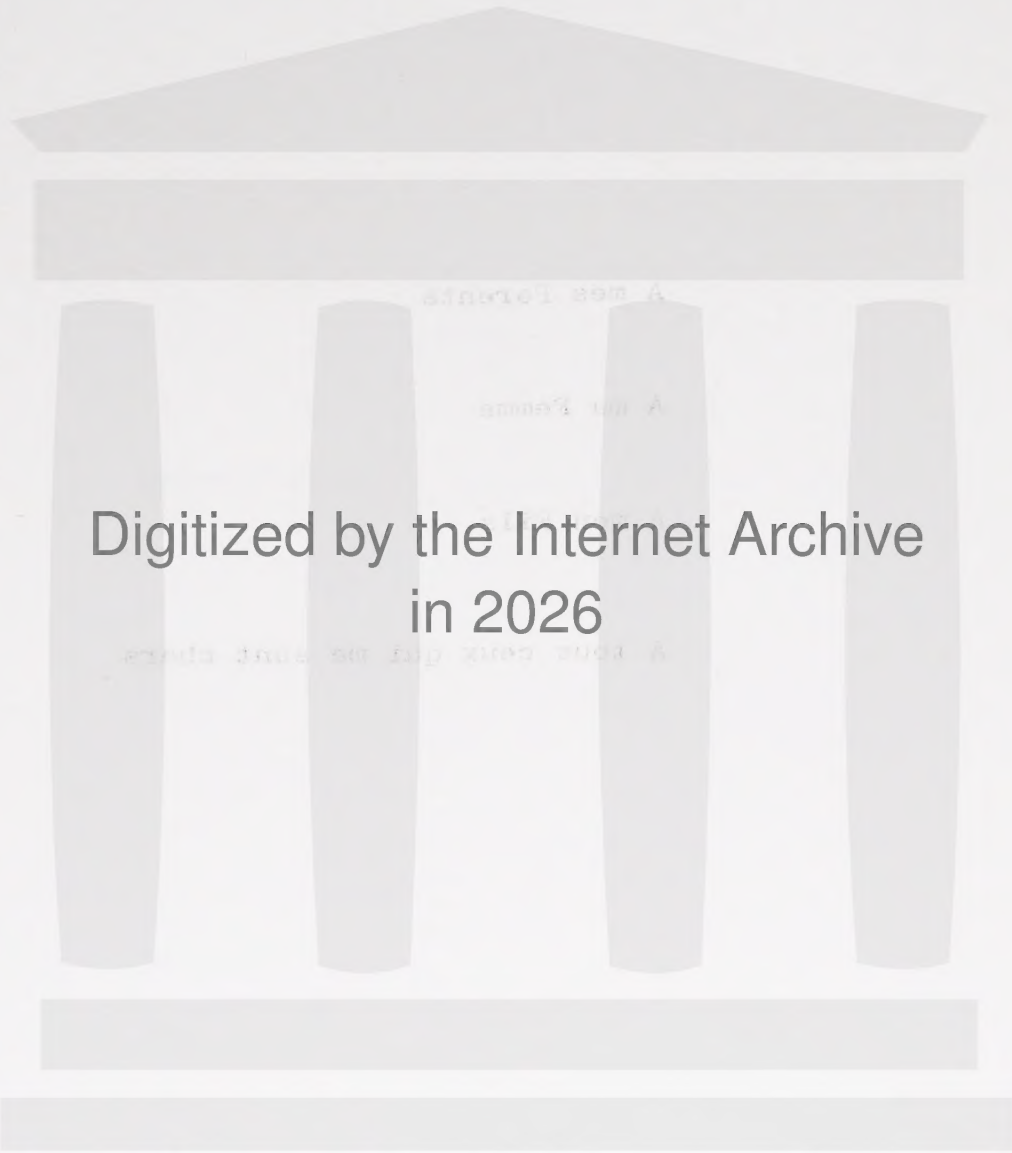
A

Madame B. ROIZEN

Professeur à la Faculté des Sciences d'Orsay

En témoignage

de ma respectueuse reconnaissance



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551914_0035

AVANT - PROPOS

Qu'il me soit permis d'adresser à Madame ROIZEN, qui a dirigé ce travail, l'expression de ma très vive reconnaissance. J'ai bénéficié constamment, au cours de mes recherches, de ses conseils précieux et de ses encouragements.

Je remercie particulièrement Monsieur ROIZEN qui m'a fait profiter de sa très grande expérience scientifique et technique notamment lors de la fabrication des lames minces.

Madame ROBAUX a bien voulu calculer certains résultats aux centres de calcul automatique de Nancy et d'Orsay ; Monsieur LE ROUX a réalisé les montages mécaniques ; Monsieur GRALL m'a apporté son concours dans les techniques photographiques. Je leur exprime, ainsi qu'à tous les chercheurs et techniciens du laboratoire, ma gratitude pour leur précieuse collaboration.

INTRODUCTION :

Les corrections de la fonction d'appareil (notamment par écrans apodisants) peuvent être reliées à la fonction de transfert de l'instrument. Cas des pupilles circulaires ; cas des pupilles annulaires.....	5
--	---

PREMIERE PARTIE : LES PUPILLES CIRCULAIRES.

Etude et mesure de la fonction de transfert. Applications aux pupilles apodisées.....	6
1 - LA FONCTION D'APPAREIL.....	6
2 - LA FONCTION DE TRANSFERT DES FREQUENCES SPATIALES	8
3 - PROPRIETES DE LA FONCTION DE TRANSFERT.....	11
4 - ESTIMATION DES QUALITES D'UN APPAREIL A L'AIDE DE SA FONCTION DE TRANSFERT.....	15
4-1. Visibilité de l'image d'une mire sinusoïdale.....	15
4-2. Possibilité de séparer les images de deux points rapprochés.....	16
5 - LES CORRECTIONS PUPILLAIRES.....	18
5-1. Rappel du principe de l'apodisation à priori.....	18
5-2. La correction pupillaire à priori revient à faire effectuer une convolution par l'appareil.....	18
5-3. Exemples de corrections par pupilles apodisantes.....	23
6 - REALISATION D'UNE PUPILLE APODISANTE.....	30
6-1. Principe de la réalisation d'un apodiseur.....	30
6-2. Difficulté qui se présente : les déphasages introduits par les couches métalliques minces rendent-ils les apodiseurs inutilisables ?.....	30

7 - DETERMINATION EXPERIMENTALE DE LA VARIATION DE PHASE SUBIE PAR LA LUMIERE A LA TRAVERSE DES COUCHES METALLIQUES MINCES.

La méthode de mesure : nous proposons de déduire ψ_T de la mesure de la fonction de transfert d'une pupille dissymétrique métallisée..... 32

8 - MESURE DE LA FONCTION DE TRANSFERT $G(v)$:

Etude critique des méthodes possibles.....	38
8-1. Expressions diverses de la fonction de transfert : ses relations avec d'autres fonctions accessibles à l'expérience.....	38
8-2. Les méthodes de mesure possibles.....	42
8-3. Les corrections dans les divers procédés.....	47
8-3-1. Largeurs finies des fentes.....	47
8-3-2. Imperfections de la mire.....	48
8-3-3. Limitation de la mire.....	48
8-4. Choix de la méthode la mieux adaptée à notre problème particulier. Exposé détaillé de ses modalités.....	49
8-5. Montage expérimental que nous avons réalisé.....	51
8-5-1. Description.....	51
8-5-2. Réglages.....	53
8-5-3. Détermination de $G(v)$	57
8-6. Précision à attendre de la méthode de mesure.....	58
8-6-1. Les différentes causes d'erreur. Influence de la limitation de la mire.....	58
8-6-2. Influence des imperfections de la mire.....	59
8-6-3. Influence des largeurs finies des fentes.....	64
8-7. Contrôles de la méthode.....	71
8-7-1. Pupille carrée de transmission uniforme. Détermination de la fréquence de coupure.....	71
8-7-2. Pupilles circulaires et annulaires uniformes..	73
8-7-3. Altération de la fonction de transfert en présence d'un défaut de mise au point.....	73
8-8. Problèmes particuliers soulevés par la mesure de la fonction de transfert complexe $G(v)$ des lames métallisées en vue de la détermination du déphasage $\varphi(x)$..	76

8-9. Influence sur la qualité des apodiseurs du terme de phase introduit par la métallisation du support.....	89
9 - REALISATION EFFECTIVE D'UN APODISEUR.	
, Vérification de l'efficacité de l'apodiseur.....	92
10 - PROBLEME DU VIEILLISSEMENT D'UN APODISEUR.....	94
10-1. La transmission de l'apodiseur au moment de sa fabrication et 6 années après.....	94
10-2. Etude des figures de diffraction.....	94
10-2-1. Les profils calculés.....	96
10-2-2. Le procédé de photométrage photographique de la figure de diffraction.....	96
10-2-3. Application du procédé à l'apodiseur. Effet du vieillissement.....	99
10-3. Influence du vieillissement sur la fonction de transfert.	99

DEUXIEME PARTIE : LES PUPILLES ANNULAIRES.

Etude des corrections pupillaires. Leur efficacité est réduite. Autres possibilités de correction grâce à la fonction de transfert.....	100
1 - CORRECTION A PRIORI DANS LE CAS DES PUPILLES ANNULAIRES....	100
1-1. Les travaux antérieurs : apodisation sur un intervalle infini.....	100
1-2. Apodisation sur un intervalle limité.....	100
1-2-1. Calcul d'écrans apodiseurs annulaires.....	100
1-2-2. Les figures de diffraction associées.....	107
1-3. Etude des fonctions de transfert des apodiseurs annulaires en vue de leur correction.....	114
1-3-1. Calcul de la fonction de transfert.....	114
1-3-2. Propriétés caractéristiques de la fonction de transfert d'un apodiseur annulaire.....	116

2 - CORRECTION A POSTERIORI DES PUPILLES ANNULAIRES.	
2-1. Les corrections imaginables.....	118
2-2. Application au cas des pupilles annulaires.....	119
2-3. Difficulté de réalisation de la correction à postériori	120
2-4. Cas particuliers pour lesquels le calcul se simplifie	120
2-4-1. Objets lignés.....	120
2-4-2. Points alignés suivant une droite.....	124
3 - INFLUENCE DE LA CORRECTION DE LA FONCTION D'APPAREIL SUR LE	
RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT.....	126
3-1. Cas de l'apodisation à priori.....	126
3-2. Cas de l'apodisation à postériori.....	127
CONCLUSION.....	129
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	130

LA FONCTION DE TRANSFERT DES FREQUENCES SPATIALES EN APODISATION =====

I N T R O D U C T I O N

La formation de l'image par un instrument d'optique est liée à la fonction d'appareil qui est la répartition de luminance dans l'image d'un élément de l'objet donnée par l'appareil. D'un point de vue un peu différent, on peut dire qu'elle est liée au filtrage que l'instrument opère parmi les ondes sinusoidales de luminance dont la superposition constitue l'objet. La fonction filtre n'est autre que la transformée de FOURIER de la fonction d'appareil et s'appelle, comme on sait, fonction de transfert de l'instrument.

Des travaux ont déjà été réalisés sur l'amélioration des fonctions d'appareil. Nous voudrions voir comment se traduisent les corrections par écrans absorbants qu'on a déjà proposés, du point de vue de la fonction de transfert de l'instrument. Notre but est de poser la question de savoir si ces corrections sont les seules envisageables notamment dans le cas où elles paraîtraient décevantes ; nous verrons d'ailleurs qu'elles le sont effectivement dans le cas difficile des pupilles obturées.

Dans une première partie, nous étudierons la correction des pupilles circulaires à l'aide d'écrans apodisants et montrerons que ce type de correction revient à faire effectuer par l'appareil une convolution de la fonction d'appareil par une fonction corrective. Nous nous demanderons alors s'il vaut la peine de réaliser ces apodiseurs circulaires, ce qui nous amènera à la mesure de fonctions de transfert complexes. Nous vérifierons enfin l'efficacité de certaines réalisations effectives d'apodiseurs.

Dans une deuxième partie, nous appliquerons la méthode des corrections pupillaires aux pupilles obturées et nous montrerons qu'on aboutit à un semi-échec. Nous rechercherons alors les possibilités de corrections autres que l'apodisation par écrans pupillaires et nous en ferons l'application à des cas particuliers.

I - PUPILLES CIRCULAIRES.

Les pupilles circulaires à isopaques (lignes d'égale densité optique) circulaires se rencontrent un peu partout en optique et le problème de la correction des images qu'elles donnent se pose fréquemment. Mais, avant d'étudier plus avant ces corrections, nous allons préciser les définitions de la fonction d'appareil et de la fonction de transfert et rappeler quelques propriétés de cette dernière.

1 - FONCTION D'APPAREIL. RELATION DE CORRESPONDANCE OBJET-IMAGE.

Il existe une relation qui indique comment se forme à travers un instrument d'optique l'image d'un objet O dont tous les éléments émettent des vibrations parfaitement incohérentes.

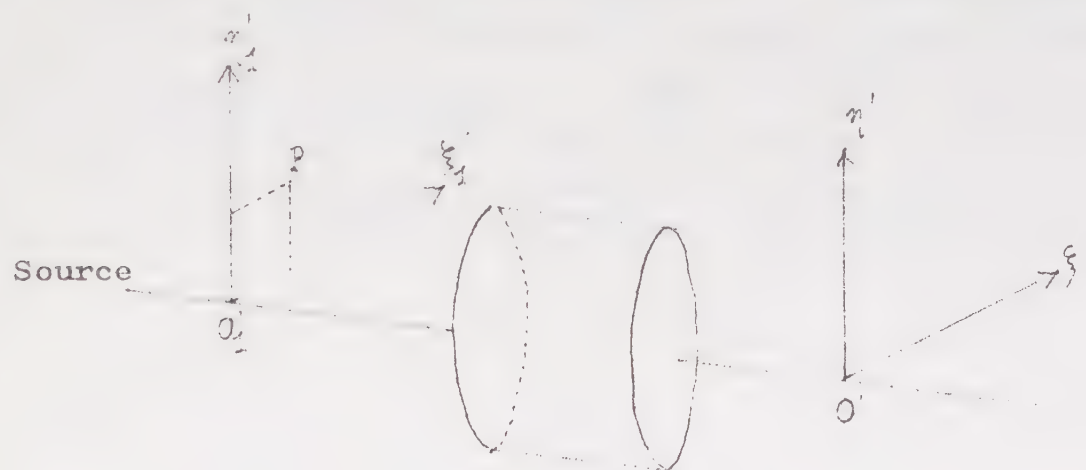


Fig. 1

Soit un instrument d'optique formant d'un objet situé dans le plan $\xi_1 O_1 \eta_1$, une image dans le plan $\xi' O' \eta'$, les axes $O' \xi'$, $O' \eta'$ étant conjugués dans l'instrument des axes $O_1 \xi_1$, $O_1 \eta_1$ *. On sait qu'un point objet de brillance unité placé en O_1 donne une image qui ne se réduit pas à un point situé en O' , mais qui s'étale autour de ce point. Cette répartition d'éclairement $F(\xi', \eta')$ est la figure de dissipation du point.

Si la condition d'isoplanétisme est satisfaite, l'image d'un point P (élément d'objet) de coordonnées (ξ_1, η_1) est $F(\xi' - \xi_1, \eta' - \eta_1)$,

* Nous réservons les lettres "sans accent", pour désigner un peu plus loin, des coordonnées réduites.

et l'image $E(\xi', \eta')$ d'un objet $O(\xi_1', \eta_1')$ est obtenue en faisant la somme sur le plan de l'objet des éclairissements produits par les images des divers points de l'objet :

$$(1) \quad E(\xi', \eta') = \iint_{\text{objet}} O(\xi_1', \eta_1') F(\xi' - \xi_1', \eta' - \eta_1') d\xi_1' d\eta_1'.$$

C'est une relation de convolution que l'on écrit sous la forme :

$$\boxed{E = O * F}.$$

La fonction $F(\xi', \eta')$, supposée invariante par translation de l'élément d'objet est la fonction d'appareil. Elle indique le rôle de l'instrument d'optique dans la formation de l'image.

Cette figure de dissipation $F(\xi', \eta')$ se confond avec une figure de diffraction $I(\xi', \eta')$ si, comme nous le supposerons par la suite, l'objectif utilisé est parfaitement corrigé des aberrations géométriques.

Cas de la pupille circulaire : l'image d'un point lumineux donnée par une pupille circulaire est formée d'un système d'anneaux de luminance $I(\xi', \eta')$ et, en passant en coordonnées polaires, la fonction d'appareil peut donc s'écrire $I(\xi', \eta') = I(\rho')$. Elle est de révolution.

2 - FONCTION DE TRANSFERT DES FREQUENCES SPATIALES ν' , μ' .

2-1. Définitions.

On peut montrer qu'une répartition de luminance dans un objet non périodique $O(\xi'_1, \eta'_1)$ de support borné, peut être représentée sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ par une somme d'une double infinité d'ondes sinusoïdales de la forme :

$$(2) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} o(\nu', \mu') \cos \left[2\pi (\nu' \xi'_1 + \mu' \eta'_1) + \varphi(\nu', \mu') \right] d\nu' d\mu'.$$

On appelle fréquences spatiales ν' et μ' les inverses des périodes qui prennent toutes les valeurs entre 0 et $+\infty$.

L'équation (2) s'écrit encore :

$$O(\xi'_1, \eta'_1) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} o(\nu', \mu') \exp j\varphi(\nu', \mu') \exp 2\pi j(\nu' \xi'_1 + \mu' \eta'_1) d\nu' d\mu'$$

c'est à dire

$$O(\xi'_1, \eta'_1) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} o(\nu', \mu') \exp j\varphi(\nu', \mu') \exp 2\pi j(\nu' \xi'_1 + \mu' \eta'_1) d\nu' d\mu'$$

La fonction d'amplitude complexe $\frac{o(\nu', \mu')}{4} \exp j\varphi(\nu', \mu')$ qui décrit complètement l'objet $O(\xi'_1, \eta'_1)$ au moyen des ondes de luminance n'est autre, d'après cette équation, que la transformée de FOURIER de $O(\xi'_1, \eta'_1)$ ou encore son spectre de FOURIER, que nous désignerons dans la suite par $S(\nu', \mu')$.

$$S(\nu', \mu') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} O(\xi'_1, \eta'_1) \exp 2\pi j(\nu' \xi'_1 + \mu' \eta'_1) d\xi'_1 d\eta'_1.$$

Soient de la même façon :

$\sigma(\nu', \mu')$ la transformée de FOURIER de l'image $E(\xi', \eta')$
et $G(\nu', \mu')$ la transformée de FOURIER de l'image d'un point $F(\xi'_1 - \xi'_2, \eta'_1 - \eta'_2)$.

Compte tenu de la relation (1) entre E , O et F , on trouve (théorème de PARSEVAL) que le spectre de l'image, c'est à dire sa transformée de FOURIER, est égal au produit de la transformée de FOURIER de l'objet par la transformée de FOURIER de la figure de dissipation du point (image de l'élément d'objet).

$$(3) \sigma(\nu', \mu') = S(\nu', \mu') \cdot G(\nu', \mu').$$

Chaque composante $S(v', \mu')$ est multipliée par un coefficient complexe $G(v', \mu')$: facteur de transmission ou de contraste de l'appareil pour l'onde sinusoïdale.

On appelle fonction de transfert de l'appareil la fonction $G(v', \mu')$ qui indique comment chaque composante traverse l'instrument.

Jusqu'à présent, nous avons envisagé le cas général où $F(\xi', \eta')$ était une figure de dissipation. Supposons maintenant que $F(\xi', \eta')$ est simplement une figure de diffraction $I(\xi', \eta')$.

$I(\xi', \eta')$, module carré de l'amplitude diffractée $\mathcal{A}(\xi', \eta')$, dépend, comme on le sait, de la répartition des amplitudes complexes des vibrations lumineuses qui traversent la pupille de sortie de l'instrument. Soit $\mathcal{C}(x', y')$ la fonction de transmission en amplitude de cette pupille. On a

$$(4) \quad I(\xi', \eta') = |\mathcal{A}(\xi', \eta')|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}(x', y') \exp 2\pi j(x' \xi' + y' \eta') dx' dy' \right|^2$$

2-2. Changement de notations.

Nous utiliserons des coordonnées cartésiennes ou polaires x, y ou r et ξ, η ou ρ choisies telles que :

1° dans le plan de la pupille, la largeur a ou $2R$ de la pupille soit l'unité ;

2° dans le plan de l'image, l'interfrange $e_0 = \frac{\lambda p'}{a}$ de la figure de diffraction que donnerait une pupille rectilinéaire de transparence uniforme soit l'unité (p' = distance pupille - image, λ = longueur d'onde de la lumière monochromatique considérée).

Elles sont liées aux longueurs que représentent les coordonnées x', y', r' et ξ', η', ρ' par les relations

$$x = \frac{x'}{a}, \quad y = \frac{y'}{a}, \quad r = \frac{r'}{2R} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\xi'}{e_0}, \quad \eta = \frac{\eta'}{e_0}, \quad \rho = \frac{\rho'}{e_0}.$$

Avec les nouvelles unités, l'intégrale (4) s'écrit :

$$|\mathcal{A}(\xi, \eta)|^2 = \left| \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{C}(x, y) \exp -2\pi j(x \xi + y \eta) dx dy \right|^2$$

$$\text{ou} \quad |\mathcal{A}(\rho)|^2 = \left| \int_0^{1/2} \mathcal{C}(r) J_0(2\pi \rho r) 2\pi r dr \right|^2$$

dans le cas d'une pupille circulaire.

Nous introduirons de même les fréquences réduites

$v = v' \cdot e_0$, $\mu = \mu' \cdot e_0$, inverse des périodes réduites de l'espace des ξ .
Nous appellerons dans la suite fonction de transfert la transformée de
FOURIER de $I(\xi, \eta)$:

$$G(v, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi, \eta) \exp 2\pi j (v \xi + \mu \eta) d\xi d\eta,$$

qui, dans le cas de la pupille circulaire, peut s'exprimer à l'aide de la transformée de HANKEL de $I(\rho)$:

$$G(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\rho) J_0(2\pi v \rho) 2\pi \rho d\rho.$$

Dans le cas de la pupille circulaire c'est un cercle de diamètre 2 (fig. 2 a).

Dans le cas de la pupille rectilinéaire c'est un carré de côté 2 (fig. 2b).

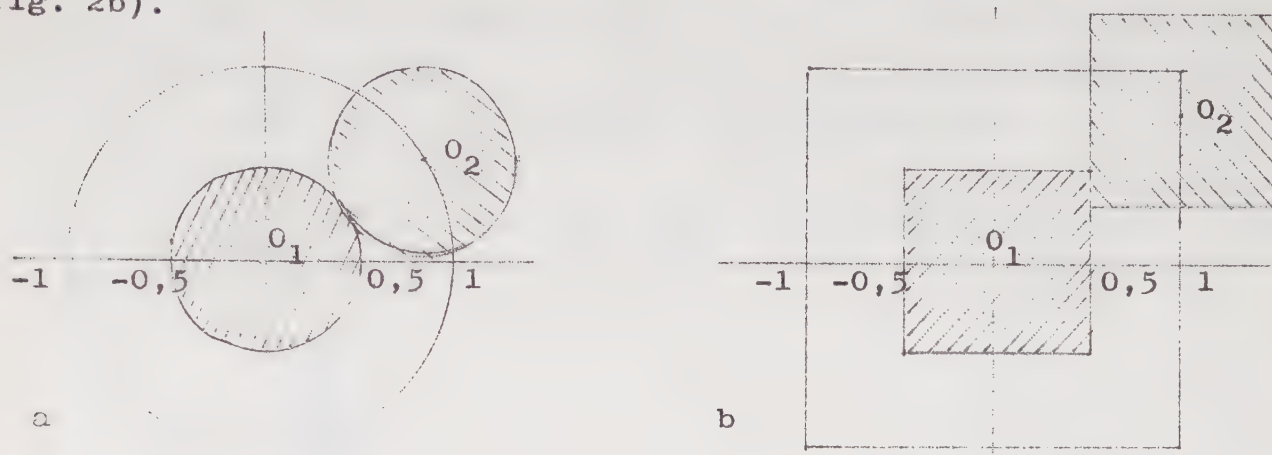


Fig. 2 : Domaine de la fonction de transfert

a) pupille circulaire

b) pupille rectilinéaire

Ceci implique des valeurs maximales pour v et μ , les fréquences limites. En unités réduites elles ne dépendent pas de $\mathcal{C}(x,y)$ ni du domaine occupé par la pupille et elles valent ± 1 .

Les fréquences limites vraies, v_1 et μ_1 ont pour valeur $\pm \frac{a}{\lambda p}$, et dépendent des dimensions de la pupille et de la longueur d'onde.

L'instrument d'optique ne laisse passer aucune composante de fréquence plus élevée que les fréquences limites. Il a donc les propriétés d'un filtre passe-bas.

3-3. Détermination de la fonction de transfert par le calcul dans le cas où elle n'est commandée que par la diffraction.

Ce problème ne se pose que pour des objectifs dont on suppose connue la transparence complexe $\mathcal{C}(x,y)$. Il peut se faire de deux façons.

Ou bien, on calcule directement la transformée de FOURIER de l'intensité diffractée dans l'image de l'élément d'objet donnée par l'objectif. Ce calcul est souvent très difficile.

Ou bien, on calcule la fonction d'autocorrélation de l'amplitude pupillaire. Ce mode de calcul est généralement beaucoup plus simple que le précédent.

Voici, à titre de rappel, les fonctions de transfert de pupilles de contours usuels et de transmission uniforme.

Cette courbe est représentée sur la figure 41 a, paragraphe 8-7-2.

c) Pupille annulaire uniforme.

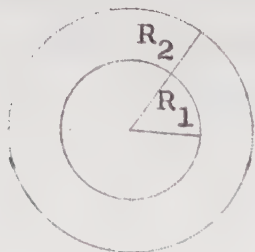


Fig. 6

L'expression donnant la fonction de transfert n'est pas classique. Elle nous était utile, aussi l'avons nous calculée ; il faut pour cela procéder par étapes successives. Si t est le taux d'obturation de la pupille, soit

$$t = \frac{R_1}{R_2}, \text{ elle peut s'écrire :}$$

$$G_n(v) = g_1(v) + g_2(v) - g_3(v), \text{ avec}$$

$$\begin{cases} g_1(v) = \frac{2}{\pi} (\arccos v - v \sqrt{1-v^2}) & \text{pour } v \leq 1 \\ g_2(v) = \frac{2t^2}{\pi} (\arccos \frac{v}{t} - \frac{v}{t^2} \sqrt{t^2-v^2}) & \text{pour } v < t \\ g_2(v) = 0 & \text{pour } v \geq t \\ g_3(v) = 0 & \text{pour } 2v \geq 1+t \\ g_3(v) = 2t^2 & \text{pour } 2v \leq 1-t \\ g_3(v) = \frac{2}{\pi} \left[\pi t^2 - t \sin 2C - (1+t^2)C + (1-t^2) \arccos \left(\frac{1+t}{1-t} \operatorname{tg} C \right) \right] & \text{pour } 1-t < 2v < 1+t \end{cases}$$

$$\text{avec } \sin C = \sqrt{\frac{4v^2 - (1-t)^2}{4t}}, \quad \cos C = \sqrt{\frac{(1+t)^2 - 4v^2}{4t}}.$$

Nous avons calculé les fonctions de transfert normalisées pour les trois taux d'obturation 0,1, 0,2, et 0,3. Ces trois courbes sont aussi représentées sur la figure 41 a.

4 - ESTIMATION DES QUALITES D'UN APPAREIL A L'AIDE DE SA FONCTION DE TRANSFERT.

Classiquement on définissait la qualité d'un instrument par la donnée de sa limite de résolution (déduite par exemple du critère de lord RAYLEIGH) ou par des mesures de visibilité effectuées sur des mires éloignées. Rappelons d'abord comment ces facteurs de qualité trouvent une interprétation précise lorsqu'on considère la fonction de transfert de l'instrument.

4-1. Visibilité de l'image d'une mire sinusoidale.

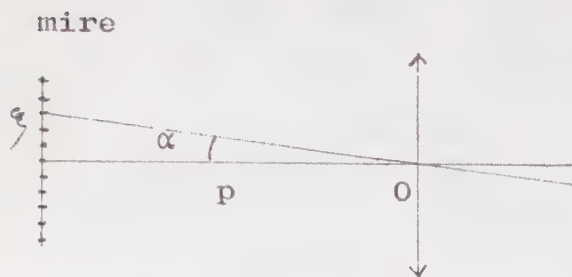


Fig. 7

Soit un objet $O(\alpha)$, avec $\alpha = \frac{\xi}{p}$, constitué par une mire dont la fonction de transmission des intensités lumineuses est sinusoidale :

$O(\alpha) = 1 + C \cos \frac{2\pi}{\Theta} \alpha$, Θ étant l'angle sous lequel on voit du centre de l'objectif le pas de la mire.

Le spectre $S(v)$ de $O(\alpha)$ n'est différent de zéro que pour trois valeurs de v :

$-\frac{1}{\Theta}$, 0 , $\frac{1}{\Theta}$ et les amplitudes correspondantes sont :

$$\frac{C}{2}, 1, \frac{C}{2}.$$

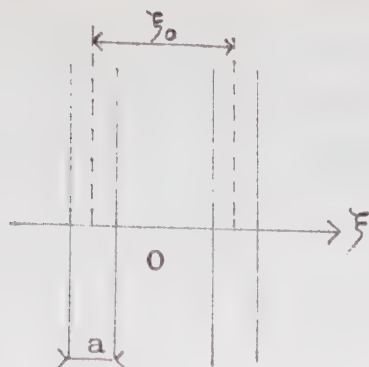
Le spectre de l'image $\sigma(v) = S(v) \cdot G(v)$ comportera donc, lui aussi, au plus trois valeurs :

$$\frac{C}{2} G\left(-\frac{1}{\Theta}\right), G(0), \frac{C}{2} G\left(\frac{1}{\Theta}\right).$$

Pour que la structure périodique soit résolue, il faut que $G\left(-\frac{1}{\Theta}\right)$ et $G\left(\frac{1}{\Theta}\right)$ ne soient pas nuls : c'est à dire que $-\frac{1}{\Theta} \gg -1$ et $\frac{1}{\Theta} \ll 1$.

A la limite, c'est à dire pour $\Theta = \pm 1$, la mire est juste visible. Bien entendu Θ représente ici une variable angulaire réduite. L'angle correspondant est $\Theta' = \Theta \frac{\lambda}{a}$, ce qui donne ici $\Theta'_{\text{limite}} = \lambda/a$; lorsqu'on utilise une série de mires de pas différents, la dernière mire visible sera celle dont le pas est vu sous un angle égal à λ/a . C'est là un résultat classique. Il reçoit ici son explication.

4-2. Possibilité de séparer les images de deux points rapprochés.



Soient, pour commencer, deux fentes parallèles, de largeur a , de hauteur b , placées à la distance ξ_0 l'une de l'autre et que nous supposons uniformément éclairées.

Nous représenterons la luminance de cet objet par une fonction $O(\xi)$ égale à :

Fig. 8

$$O(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2ab} & \text{pour } -\frac{\xi_0 + a}{2} < \xi < -\frac{\xi_0 - a}{2} \\ & \text{et } \frac{\xi_0 - a}{2} < \xi < \frac{\xi_0 + a}{2} \text{ et } |\eta| < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

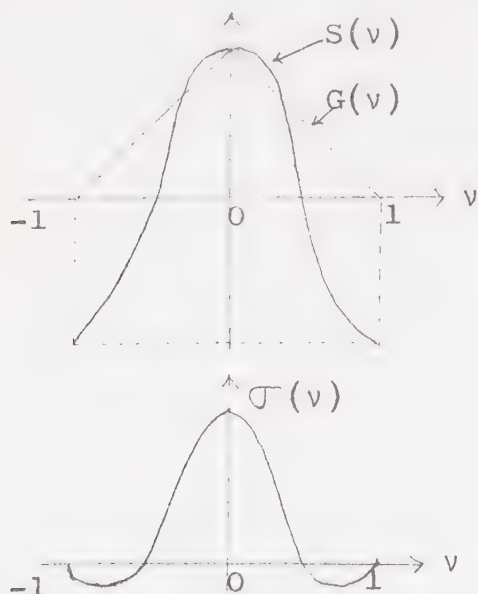
Avec cette convention pour la luminance, l'énergie sortant de ces fentes est indépendante de leurs dimensions a et b .

On trouve facilement que le spectre $S(v, \mu)$ de $O(\xi)$ est : $\frac{\sin \pi \mu b}{\pi \mu b} \cdot \frac{\sin \pi v a}{\pi v a} \cdot \cos \pi v \xi_0$.

Lorsque les dimensions des fentes tendent vers zéro, on obtient : $S(v) = \cos \pi v \xi_0$. C'est une sinusoïde de fréquence $\xi_0/2$.

Le spectre de l'image de ces deux fentes donnée par un objectif rectilinéaire uniforme est (fig. 9) :

$$\sigma(v) = S(v) \cdot G(v) \quad \text{ou} \quad \sigma(v) = \cos \pi v \xi_0 \cdot (1 - |v|).$$



Il est ainsi possible de relier entre elles les notions de limite de résolution pour l'image d'un objet et de fréquence de coupure pour le spectre de cet objet. On sait que, d'après le critère de RAYLEIGH, la limite de résolution est atteinte lorsque le maximum central de l'une des taches de diffraction coïncide avec un des deux premiers zéros qui bordent l'autre tache.

Fig. 9

La distance des deux maxima centraux est alors égale à l'interfrange $\frac{\lambda p'}{a}$ et, par suite, dans le plan objet, la distance des deux objets est égale à $\frac{\lambda p}{a} = 1$ unité optique : leur distance "réduite" est $\xi_0 = 1$. Leur spectre est $S(v) = \cos \pi v$; la fonction $1 - |v|$ découpe dans ce spectre la partie $-1 \leq v \leq +1$ qui correspond tout juste à une période de $S(v) = \cos \pi v$. Ainsi le critère de visibilité de lord RAYLEIGH revient à dire que deux points ont des images perceptibles si la fonction de transfert de l'objectif laisse passer au moins une période du spectre de l'image.

Il faut remarquer que si l'on retrouve ainsi la classique valeur de la limite de résolution, la théorie de la fonction de transfert apporte beaucoup plus d'informations que ne le fait la seule donnée du pouvoir séparateur. En effet elle ne se contente pas d'indiquer la largeur de la bande des fréquences spatiales passantes dont dépend ce pouvoir séparateur, elle précise encore la distorsion d'amplitude et de phase que subissent les ondes de luminance acceptées par l'appareil et permet ainsi d'interpréter ou de prévoir toutes les propriétés de l'image.

5 - LES CORRECTIONS PUPILLAIRES.

5-1. Rappel du principe de l'apodisation à priori.

On sait que la figure de diffraction du point donnée par un instrument d'optique à pupille circulaire est formée d'une partie centrale très brillante entourée d'anneaux brillants concentriques dont l'intensité lumineuse diminue avec l'augmentation de leur rayon.

Si on considère la courbe représentative de l'intensité lumineuse en fonction du rayon, elle comporte une partie centrale ou corps qui correspond à la tache centrale et des pieds qui correspondent aux anneaux.

L'existence de ces pieds, surtout si leur intensité est relativement grande par rapport à celle du corps, peut gêner la résolution de certains problèmes par le système optique : par exemple la séparation de deux objets très proches d'intensités lumineuses très différentes ou l'observation de détails de très fort contraste.

Pour palier à ces inconvénients on a cherché à diminuer l'importance des anneaux par rapport au corps de la figure de diffraction : ceci constitue l'apodisation. Cette apodisation peut avoir pour but soit d'abaisser certains anneaux bien définis, proches du centre, soit d'abaisser tous les anneaux à partir d'une certaine distance du centre.

Comme la répartition de la lumière diffractée dépend ^{de} la distribution des amplitudes lumineuses complexes sur la pupille de sortie, on peut, en agissant sur cette distribution, corriger la figure de diffraction. Des écrans absorbants à isopaques circulaires, placés sur la pupille, réalisent cette modification de la fonction de transmission de la pupille.

5-2. La correction pupillaire à priori revient à faire effectuer une convolution par l'appareil.

5-2-1. Fonction correctrice de la fonction de transfert.

Une pupille circulaire d'amplitude pupillaire $T_0(x,y)$ a pour figure de diffraction une fonction $I_0(\xi, \eta)$ dont la transformée de FOURIER est la fonction de transfert $G_0(v, \mu)$ de la pupille. Nous avons vu d'ailleurs que $G_0(v, \mu)$ est directement liée à $T_0(x,y)$: c'est sa fonction d'autocorrélation $G_0(v, \mu) = T_0 * T_0^*$. Lorsque l'on recouvre cette pupille d'un écran apodisant $A(x,y)$, la fonction de transmission de la pupille devient $T_0(x,y).A(x,y)$. La transformée

de FOURIER de la nouvelle figure de diffraction $I(\xi, \eta)$ est la fonction de transfert $G(v, \mu)$ de la pupille corrigée. Et $G(v, \mu)$ est la fonction d'autocorrélation de la nouvelle amplitude pupillaire :

$G(v, \mu) = (T_0 \cdot A) * (T_0 \cdot A)^*$. Ceci peut encore s'écrire :

$G(v, \mu) = (T_0 * T_0^*) \cdot \gamma(v, \mu)$ en posant

$$\gamma(v, \mu) = \frac{(T_0 \cdot A) * (T_0 \cdot A)^*}{T_0 * T_0^*} = \frac{G(v, \mu)}{G_0(v, \mu)}.$$

Cette équation définit $\gamma(v, \mu)$ sans ambiguïté puisque le dénominateur $T_0 * T_0^*$ ne s'annule qu'aux frontières du domaine de G_0 , et qu'au voisinage de ces points le numérateur est un infiniment petit du même ordre au moins.

Donc, la correction pupillaire à l'aide d'un écran apodisant revient à multiplier la fonction de transfert $G_0(v, \mu)$ de la pupille par une fonction correctrice $\gamma(v, \mu)$ de façon à obtenir la fonction de transfert $G(v, \mu)$ de la pupille corrigée.

Toutefois $\gamma(v, \mu)$ n'est pas simplement lié à la fonction apodisante $A(x, y)$, il dépend aussi de la fonction que l'on veut corriger $T_0(x, y)$. Montrons ceci sur l'exemple simple suivant : soient deux pupilles rectilinéaires uniformes. L'une est obturée dans sa partie centrale sur une largeur t , l'autre n'est pas obturée. Leurs fonctions de transmission des amplitudes pupillaires sont respectivement : $T_0(x)$ et $T'_0(x)$ (fig. 10).

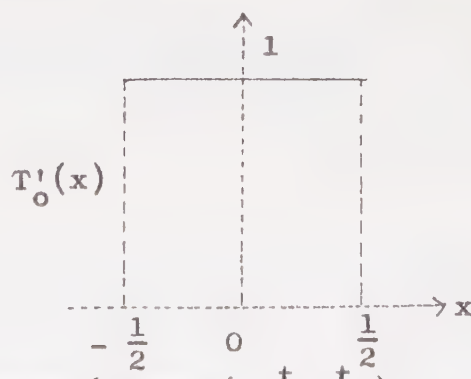
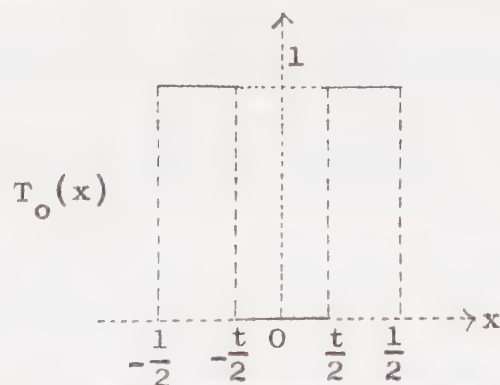
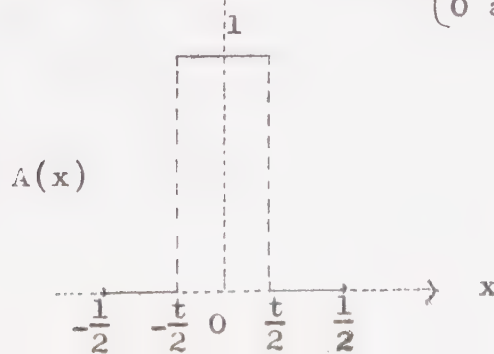


Fig. 10

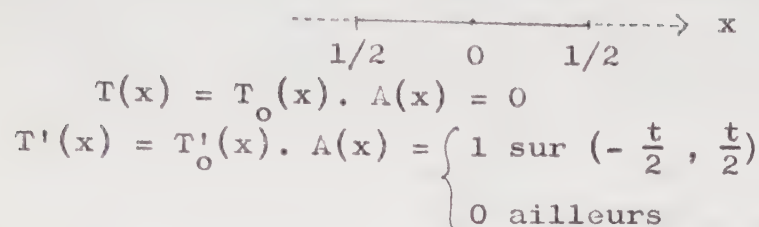
Multiplions ces deux fonctions par $A(x)$ qui vaut $\begin{cases} 1 \text{ sur } (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}) \\ 0 \text{ ailleurs (fig.11)} \end{cases}$



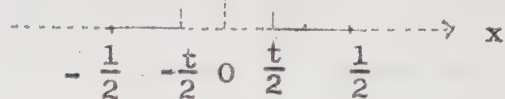
Fig; 11

Les nouvelles fonctions de transmission des pupilles sont (fig. 12) :

Fig. 12 $T(x)$



$T'(x)$



Les fonctions de transfert de ces nouvelles pupilles sont :

$$G(v) = 0 \quad \text{avec } \gamma(v) = \frac{G(v)}{G_0(v)} = 0,$$

et $G'(v) = t - |v|$ avec $\gamma'(v) = \frac{G'(v)}{G'_0(v)} = \frac{t - |v|}{1 - |v|}$.

La fonction correctrice multipliant les fonctions de transfert des deux pupilles initiales est différente lorsqu'on applique une même correction $A(x)$ à ces deux pupilles. Elle dépend donc de $T_0(x)$. Ce résultat n'a d'ailleurs rien de surprenant puisqu'il n'existe pas de correspondance linéaire entre l'espace des x, y et celui des v, μ .

5-2-2. Fonction correctrice de l'intensité diffractée.

La relation $G(v, \mu) = G_0(v, \mu) \cdot \gamma(v, \mu)$ s'écrit lorsqu'on passe aux transformées de FOURIER :

$$I(\xi, \eta) = I_0(\xi, \eta) * C(\xi, \eta).$$

L'intensité diffractée corrigée est donc le résultat de la convolution de la fonction d'appareil initiale avec une fonction correctrice $C(\xi, \eta)$. Cette convolution est d'un type particulier puisqu'elle aboutit à une nouvelle fonction d'appareil qui est une intensité diffractée partout positive. C'est l'appareil lui-même qui effectue cette convolution.

La fonction correctrice est la transformée de FOURIER de $\gamma(v, \mu)$ qui est une fonction de domaine limité. $C(\xi, \eta)$, sera donc d'extension illimitée, se présentera comme une fonction d'amplitude et possédera, en général, des arches positives et négatives.

Vérifions ceci sur l'exemple simple suivant.

L'amplitude pupillaire de la pupille circulaire uniforme obturée au taux t peut être considérée comme le produit de l'amplitude pupillaire de la pupille circulaire uniforme par une fonction $\Lambda(r)$ dont la valeur est zéro sur l'obturation et 1 ailleurs.

Connaissant les fonctions de transfert $G(v)$ et $G_0(v)$ des pupilles circulaires uniformes respectivement obturée au taux $t = 0,2$ et non obturée (fig. 13), on en déduit $\gamma(v) = \frac{G(v)}{G_0(v)}$ (fig. 14). Le calcul de la transformée de HANKEL de $\gamma(v)$ nous donne la fonction correctrice $C(\xi)$ (fig. 15).

On remarquera effectivement que cette fonction n'est pas partout positive et qu'elle est infiniment étendue.

L'apodisation *à priori* réalisée à l'aide d'écrans absorbants recouvrant la pupille revient donc finalement à faire effectuer à l'appareil une convolution de la fonction d'appareil initiale avec une fonction correctrice. Il est très avantageux que ce soit l'appareil qui, avec sa pupille apodisante, réalise cette convolution. Il apparaît en effet, qu'il nous serait le plus souvent impossible de la faire nous-même. La fonction $C(\xi, \eta)$ par laquelle il faudrait convoluer l'enregistrement de la fonction d'appareil pour obtenir la nouvelle figure de diffraction n'est en général pas partout positive et en plus son domaine s'étend à l'infini. Il serait difficile de réaliser un dispositif expérimental répondant à ces exigences.

On a donc, avec la pupille apodisante, un moyen de réaliser une convolution de la fonction d'appareil susceptible de fournir de bons résultats.

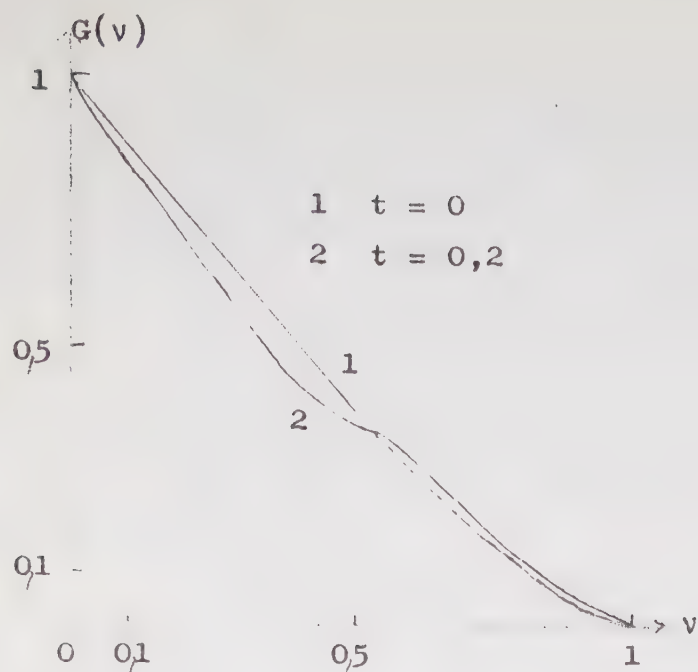


Fig. 13 : Fonctions de transfert de la pupille circulaire uniforme

- (1) sans obturation centrale
- (2) avec obturation centrale taux 0,2.

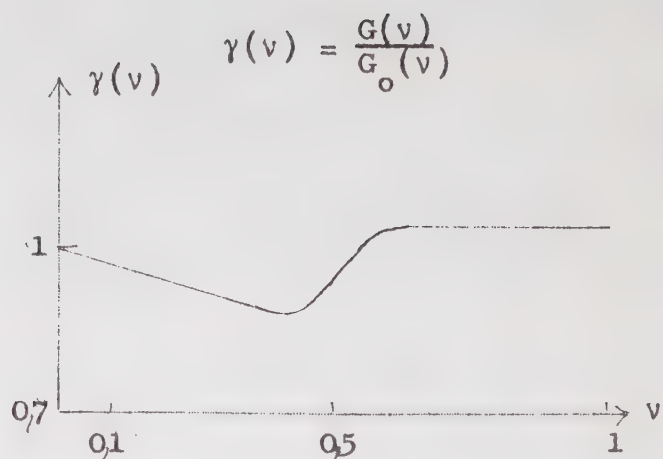


Fig. 14 : Fonction correctrice

$$\gamma(v) = \frac{G(v) \text{ (circ.uni.obt. taux 0,2)}}{G_0(v) \text{ (circ. uniforme)}}$$

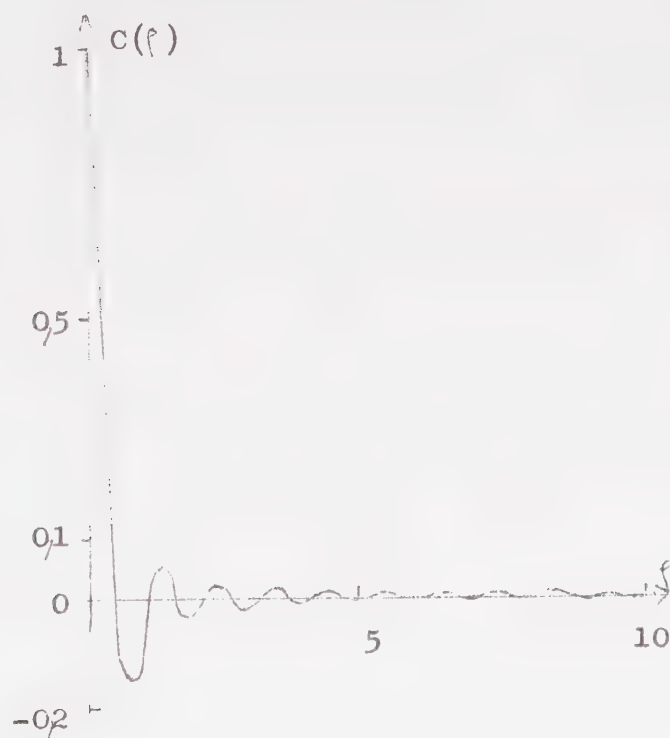


Fig. 15 : Fonction correctrice $C(\rho)$, transformée de HANKEL de $\gamma(v)$ avec laquelle il faut convoluer la fonction d'appareil de la pupille sans obturation pour obtenir la fonction d'appareil de la pupille obturée au taux 0,2.

5-3. Exemples de corrections par pupilles apodisantes.

Nous donnerons ci-dessous les caractéristiques de deux pupilles apodisantes destinées à un objectif circulaire non obturé, ainsi que les fonctions correctrices $\gamma(v)$ de leurs fonctions de transfert.

5-3-1. Rappel du principe de la recherche d'une fonction apodisante.

La détermination d'une fonction pupillaire apodisante est connue [1]. Nous rappellerons brièvement le principe de la méthode des familles de fonctions de base.

La solution idéale de l'apodisation serait de se donner à priori le profil $I(\rho)$ de la figure de diffraction désirée et de déterminer ensuite la fonction pupillaire $T(r)$ correspondante. Mais la transformée de FOURIER (ou ici transformée de HANKEL) d'une fonction arbitraire $\mathcal{A}(\rho)$ s'étend, en général, à l'infini : ce ne peut donc être une fonction pupillaire puisque celle-ci doit être identiquement nulle en dehors de la pupille.

Cette solution étant écartée, on calculera $T(r)$ en imposant certaines conditions bien définies à $I(\rho)$. Ces conditions fixées à priori pour $I(\rho)$ sont les critères d'apodisation.

On considère les fonctions $T(r)$ qui appartiennent à une famille de fonctions constituée par toutes les combinaisons linéaires possibles de n fonctions de base $f_p(r)$. $T(r)$ dépend alors de n paramètres qui sont les coefficients a_p de la combinaison

$$T(r) = \sum_{p=0}^{p=n-1} a_p \cdot f_p(r).$$

Les fonctions $f_p(r)$, identiquement nulles pour $|r| > 1/2$, doivent être choisies de sorte qu'on en connaisse les transformées $\varphi_p(\rho)$ par l'intégrale de diffraction. Les $\mathcal{A}(\rho)$

$$\mathcal{A}(\rho) = \sum_{p=0}^{p=n-1} a_p \cdot \varphi_p(\rho)$$

forment également une combinaison linéaire à n coefficients indéterminés a_p , des fonctions $\varphi_p(\rho)$.

Il faut, en appliquant à ces fonctions $\mathcal{A}(\rho)$ les critères d'apodisation choisis, déterminer les a_p qui donnent le meilleur écran pour un nombre déterminé de termes. On obtient ainsi un système d'équations linéaires admettant pour solution les a_p qui déterminent entièrement $T(r)$.

5-3-2. Les deux apodiseurs considérés.

a) la fonction de transmission des amplitudes pupillaires du premier apodiseur, calculée par Madame ROIZEN [1], pour apodiser sur l'intervalle $\frac{5}{\pi} < \rho < \infty$, est :

$$T(r) = 0,3959 + 0,6384 J_0(2\lambda_1 r) - 0,0801 J_0(2\lambda_2 r) + 0,0457 J_0(2\lambda_3 r)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ désignent ici les trois premières racines positives de $J_1(z) = 0$; J_0 et J_1 désignant respectivement les fonctions de BESSEL d'ordres zéro et un.

La forme de la courbe représentative (fig. 16 a) de cette transmission est tout à fait normale et habituelle pour ce type d'apodiseur : elle comporte un maximum central et un minimum sur les bords.

La transmission totale de cet écran est 0,16 ; c'est une valeur assez faible.

La courbe représentative de la figure de diffraction associée (fig. 16 a) fait apparaître un taux d'apodisation important.

b) la fonction de transmission des amplitudes pupillaires du deuxième apodiseur, également calculée par Madame ROIZEN [2] pour apodiser sur l'intervalle $\lambda_3/\pi < \rho < \lambda_{13}/\pi$, est :

$$T'(r) = 0,5497 + 0,6016 J_0(2\lambda_1 r) - 0,7104 J_0(2\lambda_2 r).$$

La forme de la courbe représentative de $T'(r)$ est inhabituelle (fig. 16 b). Nous remarquons, en effet, un minimum de transmission central et un minimum sur les bords tandis que le maximum de transmission se situe aux environs de $r = 0,22$. Cette forme curieuse s'explique par le fait que l'écran a été calculé pour satisfaire à deux conditions à la fois : on a recherché une bonne apodisation alliée à une transmission totale élevée.

En effet, pour les écrans à n termes, si on se contente d'un taux d'apodisation inférieur au maximum possible qui, lui, correspond à un écran bien déterminé, on a une infinité d'écrans possibles. Parmi ceux-ci on choisit alors celui qui satisfait à une condition déterminée : ici, un maximum de transmission totale. Pour l'apodiseur T' , celle-ci est 0,407, valeur nettement supérieure à celle de l'apodiseur T .

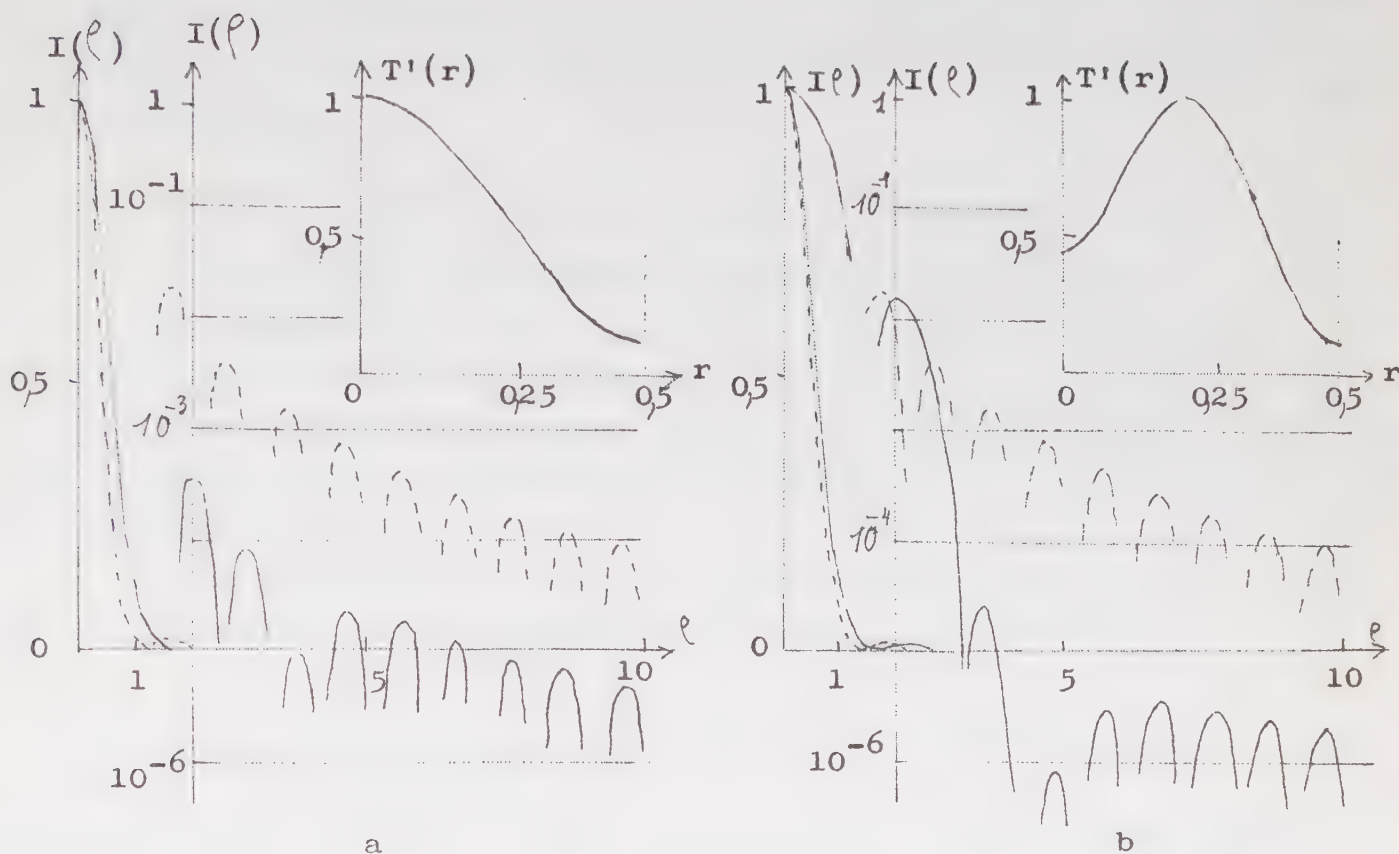


Fig. : 16 a et b

Courbes représentatives de fonctions apodisantes pour objectif circulaire et des figures de diffraction associées.

a) fonction $T(r)$

b) fonction $T'(r)$.

En pointillé la figure de diffraction de la pupille circulaire uniforme.

La fonction d'appareil est représentée fig. 16 b. L'apodisation est bonne ; en effet, entre les abscisses $\rho = 3$ et $\rho = 13$, le facteur de réduction des intensités est supérieur à 100. On note cependant un élargissement notable du centre et du premier anneau.

Nous disposons donc ici de deux apodiseurs dont les fonctions de transmission sont très différentes. Il est intéressant de voir si ces différences se répercutent sur leurs fonctions de transfert et les fonctions correctrices $\gamma(v)$.

5-3-3. Les fonctions de transfert des apodiseurs T et T'.

a) Calcul de la fonction de transfert d'un apodiseur.

Le calcul direct de la fonction de transfert nécessiterait d'abord la détermination de la fonction d'intensité diffractée $I(\xi, \eta)$ ou $I(\rho)$ dans l'image d'un point. Ensuite, il faudrait chercher la transformée de FOURIER (ou la transformée de HANKEL.) de I. Ces calculs seraient très pénibles.

Mais nous avons vu que la fonction de transfert $G(v, \mu)$ était aussi la fonction d'autocorrélation de l'amplitude pupillaire :

$$G(v, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T(x, y) \cdot T^* (x-v, y-\mu) dx dy.$$

Dans le cas de la pupille circulaire, l'amplitude pupillaire présente la symétrie de révolution et il en est de même de la fonction de transfert ; on a $G(v, \mu) \equiv G(v)$

et

$$G(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x, y) \cdot T^* (x-v, y) dx dy.$$

L'amplitude pupillaire d'un apodiseur $T(r) = \sum_{p=0}^{p=n-1} a_p J_0(2\lambda_p r)$ peut s'écrire : $T(r) \equiv T(x, y)$ avec $r^2 = x^2 + y^2$ ou $T(x, y) = \sum_0^{n-1} a_p J_0(2\lambda_p \sqrt{x^2 + y^2})$.

La fonction de transfert sera :

$$G(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_0^{n-1} a_p J_0 \left[2\lambda_p \sqrt{x^2 + y^2} \right] \cdot \sum_0^{n-1} a_q J_0 \left[2\lambda_q \sqrt{(x-v)^2 + y^2} \right] dx dy$$

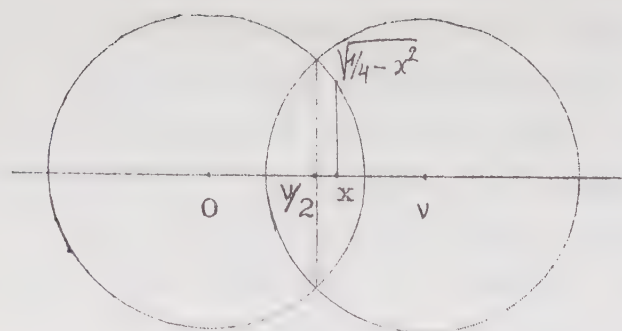


Fig. 17

L'intégration se faisant sur la partie commune à la pupille et à la pupille décalée de v , les limites d'intégration se déterminent facilement sur le schéma ci-contre.

$G(v)$ s'écrit :

$$G(v) = 4 \int_{v/2}^{1/2} dx \int_0^{\sqrt{1/4 - x^2}} \sum_0^{n-1} a'_p J_0 \left[2\lambda_p \sqrt{x^2 + y^2} \right] \cdot \sum_0^{n-1} a'_q J_0 \left[2\lambda_q \sqrt{(x-v)^2 + y^2} \right] dy$$

Cette dernière intégrale semble difficile à calculer. Mais nous savons qu'il est toujours possible de donner une approximation en moyenne de la fonction pupillaire en $J_0(2\lambda_p r)$ par un système de base $(1-4r^2)^p$:

$$T(r) = \sum_0^{m-1} a'_p [1-4r^2]^p = \sum_0^{m-1} a'_p [1-4(x^2+y^2)]^p$$

La fonction d'autocorrélation devient :

$$G(v) = 4 \int_{v/2}^{1/2} dx \int_0^{\sqrt{1/4 - x^2}} \sum_0^{m-1} a'_p [1-4(x^2+y^2)]^p \cdot \sum_0^{m-1} a'_q [1-4\{(x-v)^2+y^2\}]^q dy$$

avec $0 \leq v \leq 1$.

Le calcul est ainsi devenu beaucoup plus simple. Si le nombre de termes de la fonction pupillaire atteint 5, il faut faire appel à une ordinateuse électronique car le nombre d'intégrales doubles à calculer augmente très rapidement.

b) Fonctions de transfert des deux apodiseurs considérés.

Nous avons appliqué cette méthode de calcul aux deux apodiseurs T et T' .

Les fonctions de transfert obtenues $G(v)$ et $G'(v)$ sont représentées sur la figure 18 a.

L'examen de ces courbes suggère les remarques suivantes :

Les deux courbes ont la même allure générale. La fréquence effective de coupure ν_e est inférieure à la fréquence limite ν_1 permise par les dimensions géométriques de l'apodiseur. Cela correspond à une baisse du pouvoir de résolution. Par contre, la transmission des basses fréquences est améliorée. La transmission des fréquences moyennes est telle que l'on peut dire que l'apodiseur se comporte pour elles comme une pupille uniforme de diamètre inférieur. Mais ces fréquences passent mieux que dans le cas de la pupille uniforme de diamètre inférieur qui laisserait passer le même flux. Par exemple : l'apodiseur T' ayant un diamètre utile de 24 mm et une transmission totale de 0,407, on trouve pour la pupille uniforme équivalente un diamètre de 15,5 mm. La figure 18 b permet de comparer les fonctions de transfert de l'apodiseur T', de la pupille uniforme de même diamètre et de la pupille uniforme laissant passer le même flux.

Ces propriétés vérifient les propositions qui ont été démontrées ailleurs, en particulier celle qui dit que la courbe $G(\nu)$ d'un apodiseur doit ramper sur l'axe des ν au voisinage de $\nu = 1$ [1].

Nous avons d'autre part mesuré, grâce au montage expérimental décrit plus loin, et en utilisant une très bonne réalisation de l'apodiseur T', les fonctions de transfert de cet apodiseur en présence d'un défaut de mise au point. Les courbes obtenues sont représentées fig. 19a. Mais, l'apodiseur utilisé, étant à bords sombres, est l'analogue d'une pupille diaphragmée. Il est donc intéressant de comparer, ici aussi, le comportement de l'apodiseur en présence d'une défocalisation à la pupille uniforme laissant passer le même flux défocalisée. La figure 19 b donne les courbes expérimentales, établies par nous, de la fonction de transfert de cette pupille pour les mêmes valeurs de la défocalisation.

La comparaison de ces deux séries de courbes montre le net avantage que procure l'apodiseur pour la transmission des fréquences moyennes et hautes, celle des basses fréquences étant du même ordre. La fréquence effective de coupure de l'apodiseur est beaucoup plus grande que celle de la pupille uniforme. Elle atteint le double dans le cas de grandes défocalisations.

On voit l'intérêt que pourrait présenter l'utilisation d'un apodiseur en photographie pour augmenter la profondeur de champ et tout particulièrement dans le cas d'objets très étendus en profondeur.

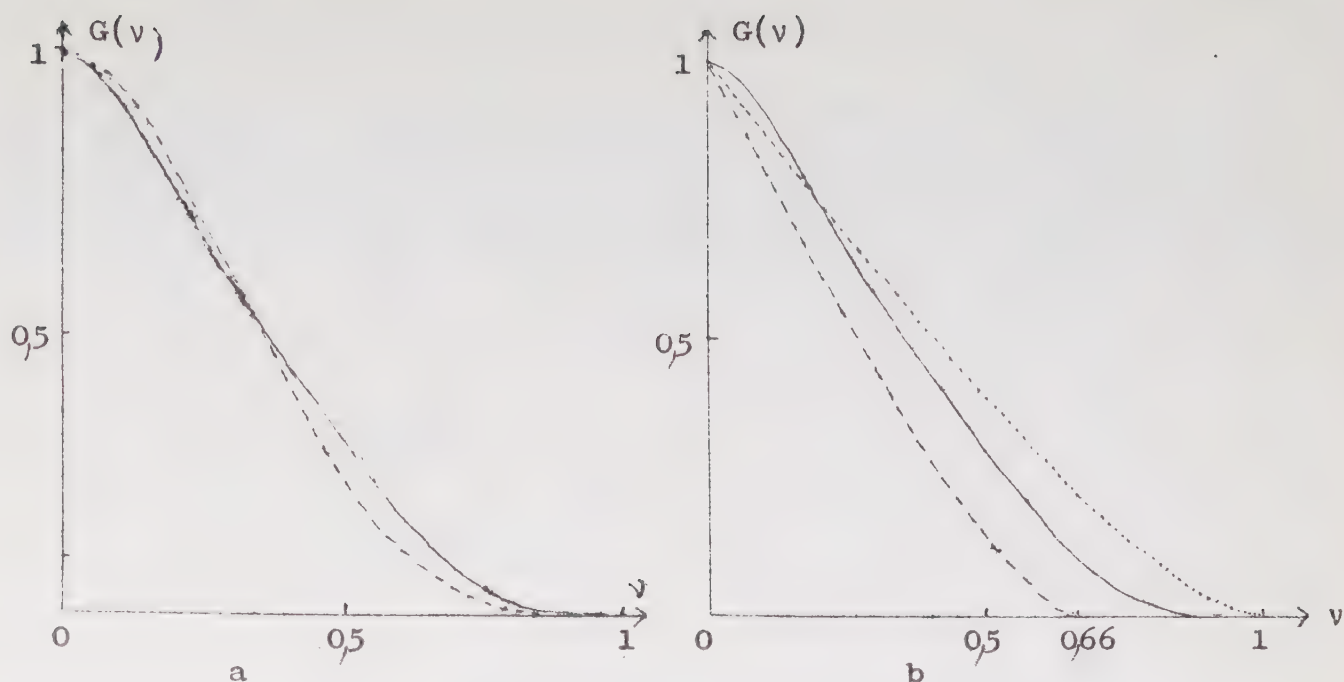


Fig. 18 a et b Fonctions de transfert obtenues par le calcul

a) — apodiseur $T'(r)$
 ---- apodiseur $T(r)$

b) — apodiseur $T'(r)$
 pupille circulaire uniforme de même diamètre
 ---- pu. circ. uni. laissant passer le même flux.

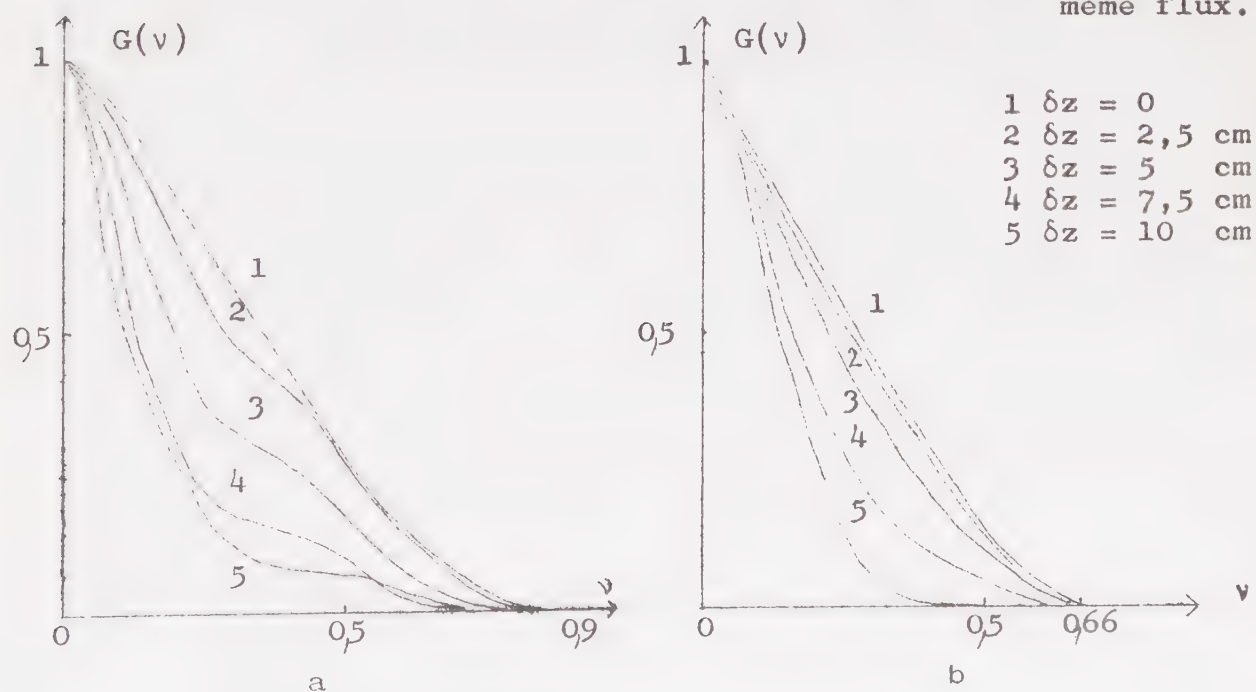


Fig. 19 a et b Fonction de transfert en présence d'un défaut de mise au point représenté par la quantité δz

a) pour l'apodiseur $T'(r)$
 b) pour la pupille uniforme laissant passer le même flux.

5-3-4. Les fonctions correctrices $\gamma(v)$.

Nous avons calculé les fonctions correctrices $\gamma(v)$ et $\gamma'(v)$ par lesquelles il faudrait multiplier la fonction de transfert $G_0(v)$ de la pupille circulaire uniforme pour obtenir les fonctions de transfert $G(v)$ et $G'(v)$ des deux apodiseurs. Elles sont représentées fig. 20.

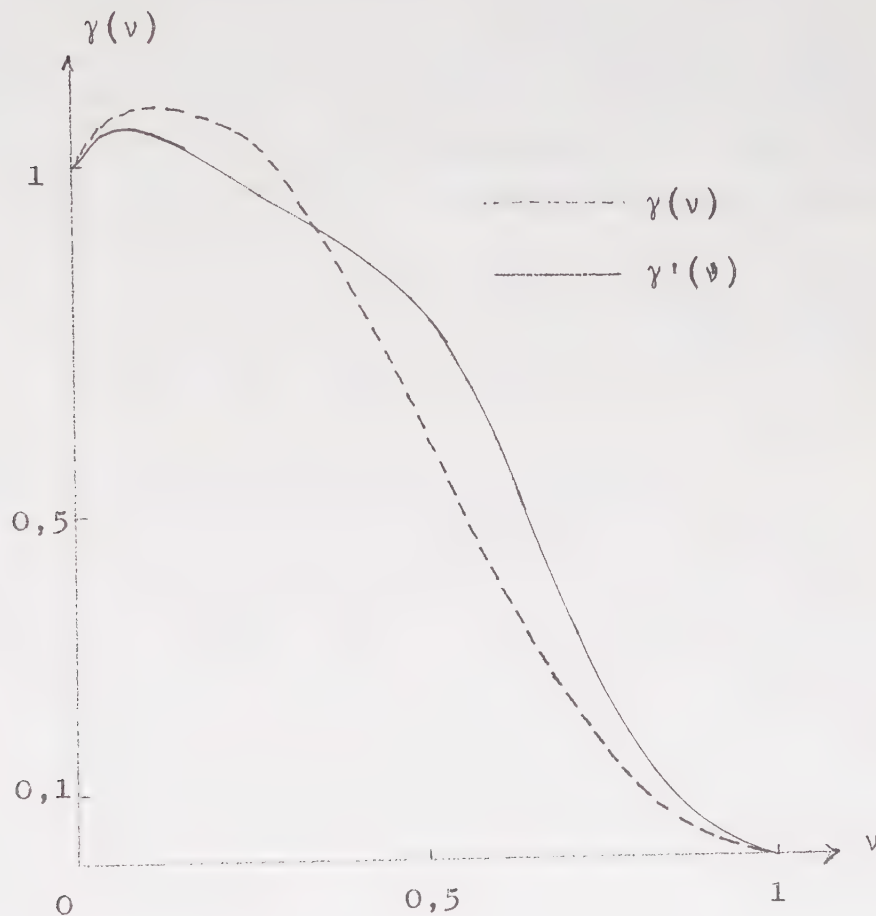


Fig. 20 : Courbes représentant les fonctions correctrices $\gamma(v)$ et $\gamma'(v)$

6 - REALISATION D'UNE PUPILLE APODISANTE.

L'apodisation à priori donnant donc, dans le cas des pupilles circulaires, de bons résultats théoriques, nous nous sommes attachés à réaliser une fonction apodisante au laboratoire et également à nous rendre compte si les écarts que présentait cette réalisation avec nos espérances étaient dûs à des imperfections de réalisation ou bien avaient une cause profonde qui est que le dépôt métallique introduit un déphasage.

Par conséquent, parallèlement à la réalisation d'un écran apodiseur, nous nous sommes posés la question : est-ce que cette réalisation a un sens ; est-ce que les déphasages qu'introduisent les lames métalliques absorbantes sont tels qu'ils amènent des aberrations qui détruisent les qualités attendues de l'image.

Pour cela, il fallait trouver une méthode de mesure du déphasage par transmission et nous en avons mis au point une qui revenait à étudier une fonction de transfert bien choisie.

6-1. Principe de la réalisation d'un apodiseur.

On sait que la réalisation d'un apodiseur peut se faire en déposant, par évaporation sous vide, une couche mince d'épaisseur non uniforme de métal, en général du chrome, sur une lame de verre présentant une très bonne planéité du point de vue optique [3]. Lorsque l'apodiseur à réaliser est circulaire, il faut que l'épaisseur de métal déposée présente aussi la symétrie de révolution. Ceci s'obtient en faisant tourner la lame de verre, pendant l'évaporation, derrière un cache de forme convenable, déterminé par le calcul. La lame acquiert ainsi une transparence non uniforme, en accord avec la fonction de transmission calculée de l'apodiseur.

6-2. Difficulté qui se présente.

Mais la loi de transmission des amplitudes lumineuses par la lame ne correspond pas à la fonction réelle $T(r)$. En effet, la traversée de la couche mince de chrome, d'épaisseur variable, impose à l'onde incidente des variations de phase $\varphi(r)$ non uniformes. La loi de transmission effectivement réalisée sera complexe, de la forme :

$$\mathcal{T}(r) = T(r) \exp j\varphi(r).$$

Cette distribution non uniforme des phases sur l'objectif garni de son apodiseur et supposé éclairé par un point à l'infini sur l'axe, équivaut à des aberrations qui peuvent contrecarrer dans l'image l'effet cherché.

Faut-il alors en déduire que les apodiseurs réalisés ne présentent aucune utilité pratique ?

Pour pouvoir répondre à cette question, nous nous sommes proposés de mesurer cette variation de phase par transmission introduite par les couches minces de chrome. Les données concernant la variation de phase par transmission sont, en effet, rares dans la littérature pour les couches absorbantes.

7 - DETERMINATION EXPERIMENTALE DE LA VARIATION DE PHASE SUBIE PAR LA LUMIERE A LA TRAVERSEE DES COUCHES METALLIQUES MINCES.

La méthode de mesure du déphasage que nous proposons fait encore intervenir la fonction de transfert.

Dans le cas d'un objectif parfaitement corrigé, garni d'un écran apodiseur, de transmission complexe $\mathcal{L}(r) = T(r) \cdot \exp j\varphi(r)$, la fonction de transfert est la fonction d'autocorrélation de l'amplitude pupillaire complexe $\mathcal{L}(r)$

$$G(v) = \mathcal{L} * \mathcal{L}^*.$$

Par suite, la fonction de transfert $G(v)$ dépend des phases $\varphi(r)$.

Nous avons alors cherché une pupille, la plus simple possible, dans laquelle φ aurait une influence très grande sur $G(v)$. La mesure de φ se ramène à une mesure de fonction de transfert d'une pupille très particulière.

7-1. Méthode de mesure.

Nous utilisons [4] une lame de verre optiquement plane (à $\lambda/10$ près) diaphragmée en carré suivant ABCD. Nous déposons sur cette lame, le

long d'une bande M, parallèlement à Oy, une couche d'épaisseur e bien déterminée du métal pour lequel nous voulons mesurer la variation de phase par transmission. Le métal ne recouvre la lame que sur une fraction t de sa largeur a .

En éclairant cette lame par un point à l'infini, on envoie sur elle une onde lumineuse plane parallèle à elle. A sa sortie, on obtient une répartition non uniforme des amplitudes lumineuses évaluées dans le plan P parallèle à la lame et qui touche le dépôt métallique. Cette répartition des amplitudes est représentable par une fonction complexe $\mathcal{L}(x)$ de l'abscisse x , comptée parallèlement à AB.

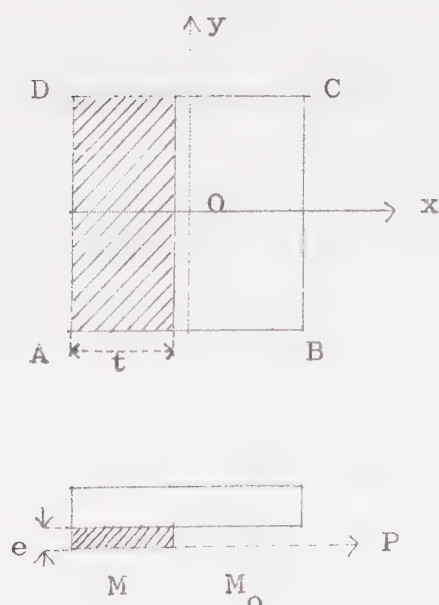


Fig. 19 : Lame métallisée

$$\mathcal{L}(x) = T(x) \exp j\varphi(x) \quad \text{où}$$

$$T(x) = \begin{cases} 1 \text{ sur la bande } M_0 \text{ où le verre est à nu. Nous négligeons} \\ \text{ici l'effet des réflexions sur les deux faces de la} \\ \text{lame de verre.} \\ T < 1 \text{ sur la bande métallisée } M. \end{cases}$$

et

$$\varphi(x) = \begin{cases} -2\pi e/\lambda \text{ sur } M_0 & \text{ou ce qui} \\ & \text{revient au} \\ \psi_T \text{ sur } M & \text{même} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \text{ sur } M_0 \\ \psi_T + \frac{2\pi e}{\lambda} = \varphi \text{ sur } M \end{cases}$$

φ est la variation relative de phase introduite par le métal, tenant compte du fait que le métal remplace une couche d'air d'égale épaisseur. ψ_T est la variation absolue de phase introduite par le métal.

Nous désirons déterminer cette fonction $\mathcal{L}(x)$ et, en particulier, l'argument φ dont nous tirerons la valeur de ψ_T (φ et ψ_T positifs correspondent à des avances de phase).

La fonction de transfert d'un objectif garni de la lame considérée est liée à $\mathcal{L}(x)$ puisque c'est la fonction d'autocorrélation de $\mathcal{L}(x)$:

$$G(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(x) \cdot \mathcal{L}^*(x-v) dx.$$

Cette fonction est ici à une dimension seulement puisqu'il s'agit en fait d'une pupille rectilinéaire (cf. page 39).

Dans le cas de notre lame, la courbe représentative de $G(v)$ affecte une forme polygonale très simple que nous allons préciser par la suite. On sait qu'en l'absence de métallisation, cette courbe se réduit à un triangle isocèle, dont la base s'étend entre $v = -1$ et $v = 1$, sur un intervalle de deux unités.

7-2. Choix de la lame la mieux adaptée à la détermination de φ .

7-2-1. Position de la bande métallisée.

Si la lame est métallisée sur la fraction t de sa largeur trois cas distincts se présentent suivant la position occupée par la bande M .

a) la bande M occupe le centre de la lame (elle couvre l'intervalle

$$-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}) \text{ (fig. 22)}$$

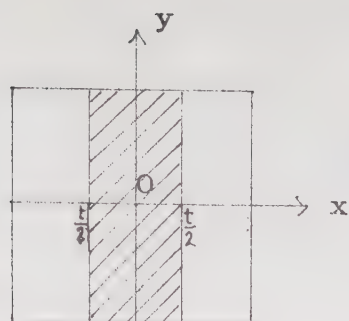


Fig. 22

b) La bande M occupe un des bords de la lame (elle couvre l'intervalle $-\frac{1}{2}$, $t-\frac{1}{2}$ par exemple) (fig. 23).

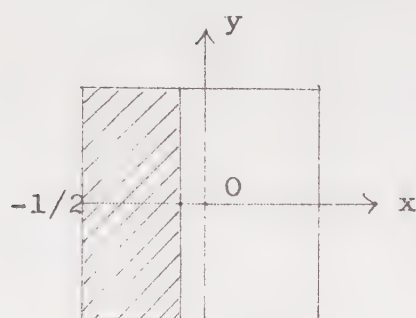


Fig. 23

c) La bande M est partiellement décentrée (fig. 24). Ici aussi, la

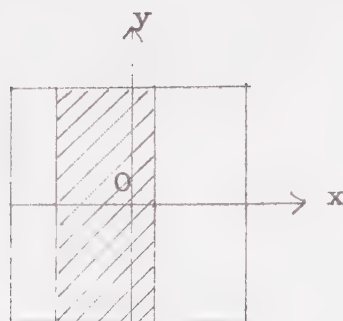


Fig. 24

La fonction de transfert demeure réelle et paire et ne dépend que de $\cos\varphi$. Elle est de la forme $G(v) = k(v) + k'(v) \frac{T}{2} \cos\varphi$, et sa dérivée est $\frac{dG(v)}{d\varphi} = -k'(v) \frac{T}{2} \sin\varphi$.

Ces formules montrent que l'évaluation de φ par la mesure de $G(v)$ et de T manquerait de sensibilité lorsque φ serait petit.

La fonction de transfert est complexe et les composantes réelle et imaginaire sont formées de plusieurs segments de droites.

La composante réelle dépend, une fois de plus, de $\frac{T}{2}\cos\varphi$ mais la composante imaginaire dépend de $\frac{T}{2}\sin\varphi$. Elle nous conduit donc à une évaluation plus précise de φ lorsque cet angle est inférieur à 45° .

Il est donc préférable de métalliser le bord de la lame.

7-2-2. Largeur de la bande métallisée.

Nous nous sommes alors demandé quelle largeur choisir pour t . L'examen des courbes (fig. 25) donnant les deux composantes de la fonction de transfert pour différentes valeurs de t et pour une épaisseur e

(donc un T et un φ) bien déterminée permet de répondre à cette question. On voit que la valeur $t = 0,5$ est de beaucoup la plus favorable pour une détermination précise de φ . En effet, dans ce cas, la composante réelle n'est formée que de deux segments de droites qui se rejoignent pour la valeur $v = 0,5$. Il en est de même pour la composante imaginaire qui de plus atteint, justement pour cette valeur de v , son maximum absolu (en valeur absolue).

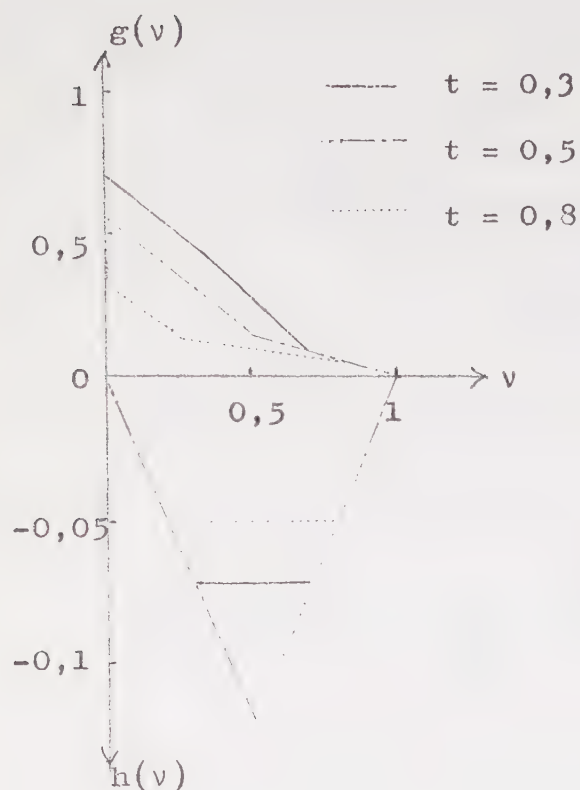


Fig. 25

Courbes représentant les composantes réelles et imaginaires de la fonction de transfert pour diverses valeurs de la largeur de la bande métallisée.

Dans ces conditions les parties réelles et imaginaires de la fonction de transfert ont respectivement les expressions simples suivantes :

$$\begin{cases} g(v) = v(-1 + T \cos \varphi - T^2) + \frac{1}{2}(1 + T^2) \\ h(v) = -vT \sin \varphi \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq v \leq 1/2$$

et

$$\begin{cases} g(v) = -vT \cos \varphi + T \cos \varphi \\ h(v) = -(1 - v)T \sin \varphi \end{cases} \quad \text{pour } 1/2 \leq v \leq 1$$

Pour $v = 1/2$, $g(1/2) = \frac{T}{2} \cos\varphi$ et $h(1/2) = -\frac{T}{2} \sin\varphi$.

La considération de ces deux valeurs particulières présente un intérêt exceptionnel pour la détermination de φ .

Nous donnons ci-dessous l'allure des deux composantes de $G(v)$ dans le cas $t = 0,5$, pour v variant de -1 à $+1$. La composante réelle est paire tandis que la composante imaginaire est impaire (cf. paragraphe 8-1-4).

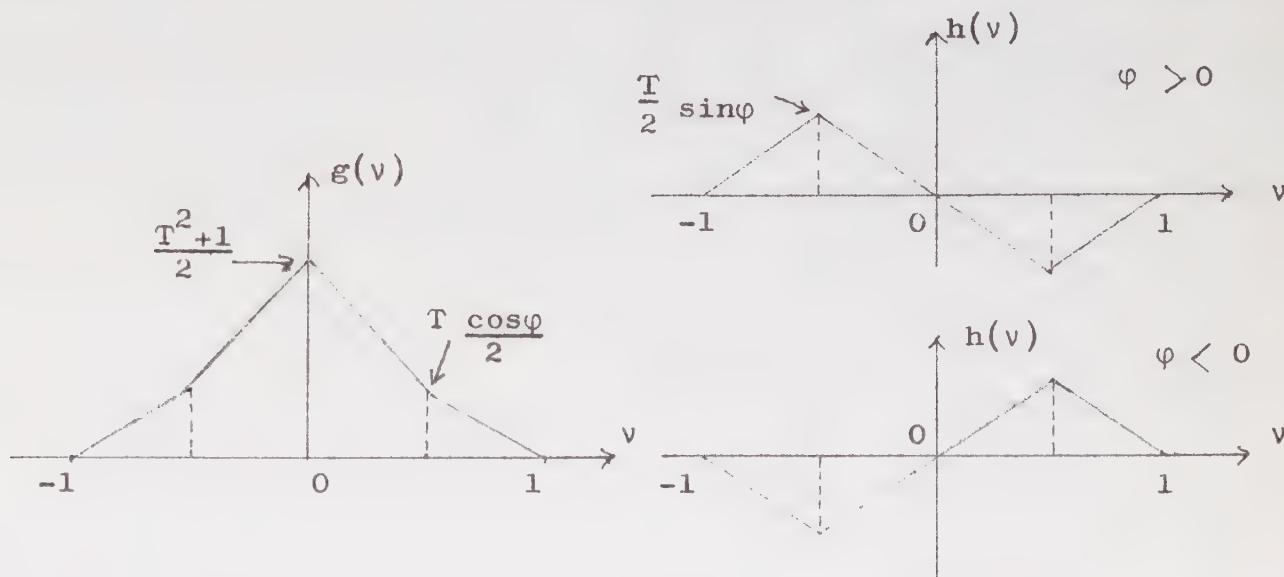


Fig. 26 : Allure des composantes réelle et imaginaire de $G(v)$ pour $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$.

Le calcul de Ψ_T à partir de φ et de $2\pi e/\lambda$ exige la connaissance du signe de φ . La phase $\varphi = \Psi_T + 2\pi e/\lambda$ peut être, à e donnée, positive ou négative selon la nature du métal étudié. Ce signe peut, dans tous les cas, se déduire des deux composantes de la fonction de transfert. En effet, partons du cas $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, les autres s'en déduisant par continuité. Si φ est positif, pour $v > 0$, la composante imaginaire sera négative tandis que si φ est négatif, toujours pour $v > 0$, la composante imaginaire est positive.

En résumé, nous avons intérêt à métalliser l'une des moitiés de notre lame pour en déterminer sa fonction de transfert complexe qui seule peut donner, avec assez de sensibilité, la phase.

Il nous faut donc mettre au point une méthode de mesure de la fonction de transfert qui puisse nous donner la composante imaginaire avec une bonne précision.

8 - MESURE DE LA FONCTION DE TRANSFERT.

Nous allons d'abord établir une propriété de la fonction de transfert qui permet de simplifier considérablement sa détermination dans les cas usuels d'emploi des instruments d'optique.

8-1. La fonction de transfert peut être obtenue à partir du spectre de l'image d'une fente infiniment fine.

Montrons d'abord que la variation de la fonction de transfert $G(v, \mu)$ le long d'un axe Ov quelconque, soit $G(v, 0)$ est la transformée de FOURIER de la figure de dissipation $f(\xi)$ que donne l'instrument d'un objet en forme de ligne infiniment fine, perpendiculaire à cet axe.

On a, pour un objet quelconque de spectre S , la relation :

$$(5) \quad \boxed{\sigma(v, 0) = S(v, 0) \cdot G(v, 0)}$$

Appliquons cette relation à un objet particulier : la fente éclairée.

La fonction fente objet peut être décrite comme la limite lorsque a tend vers 0 avec b très grand et $ab \equiv 1$, d'une fonction de luminance dite rectangle $R(\xi_1, \eta_1)$ telle que :

$$R(\xi_1, \eta_1) = \begin{cases} 1/ab & \text{pour } |\xi_1| < a/2 \text{ et } |\eta_1| < b/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Le spectre 0 de cette fonction est :

$$S(v, \mu) = \frac{\sin \pi v a}{\pi v a} \cdot \frac{\sin \pi \mu b}{\pi \mu b}.$$

Si la largeur de la fente tend vers 0, $\frac{\sin \pi v a}{\pi v a}$ tend vers 1 quelque soit v et $S(v, \mu) = \frac{\sin \pi \mu b}{\pi \mu b}$.

En particulier, sur l'axe des v ($\mu = 0$), on a : $S(v, 0) \equiv 1$ quelque soit v , de sorte que la relation (5) s'écrit ici :

$$G(v, 0) = \sigma(v, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{2\pi j v \xi} d\xi.$$

Ce résultat est très important puisqu'il permet de relier la fonction de transfert $G(v, \mu)$ à l'image $f(\xi)$ que l'objectif à étudier donne d'un élément linéaire d'objet.

La fonction de transfert $G(v, \mu)$ peut s'obtenir à partir des spectres d'images d'objets linéaires infiniment fins auxquels on confère successivement toutes les directions possibles, ou encore : $G(v, \mu)$ peut être déterminée par l'intermédiaire de ses sections diamétrales.

Les principaux avantages que l'on peut tirer de ce résultat sont : une fonction à une variable $G(v)$ est beaucoup plus facile à calculer qu'une fonction $G(v, \mu)$ à deux variables et surtout : la fonction $f(\xi)$ dont $G(v)$ est la transformée représente l'image d'une ligne et est beaucoup plus facile à enregistrer et à analyser que l'image d'un point où la quantité de lumière présente est toujours faible.

La détermination de la fonction de transfert $G(v, \mu)$ se simplifie encore lorsqu'on connaît à priori certaines des caractéristiques de $G(v, \mu)$. Il en est ainsi avec les deux types de fonctions pupillaires utilisées le plus couramment en optique : les pupilles circulaires et les pupilles rectilinéaires.

8-1-1. Cas des pupilles circulaires.

Une pupille circulaire éclairée par un point (élément d'objet) fournit un système d'anneaux de luminance $I_0(\xi, \eta)$. La fonction de transfert $G(v, \mu)$ est de révolution. Quand on passe en coordonnées polaires $I_0(\xi, \eta)$ s'écrit $I_0(\rho)$ et $G(v, \mu)$ se présente comme une fonction d'une seule variable $G(v)$ qui n'est autre que la transformée de HANKEL de la fonction d'appareil.

$$G(v) = \int_0^{\infty} I_0(\rho) J_0(2\pi v \rho) 2\pi \rho \, d\rho \quad \text{avec } I_0(\rho) = I_0(\xi, \eta).$$

Si l'on pouvait enregistrer $I_0(\rho)$ avec assez de précision, $G(v)$ s'en déduirait donc aisément. Mais, on enregistre avec plus de précision les images $f(\xi)$ d'une fente éclairée et l'on préférera calculer $G(v)$ comme la transformée de FOURIER de $f(\xi)$. La détermination d'une seule section diamétrale de G suffit d'ailleurs ici.

8-1-2. Cas des pupilles rectilinéaires.

Les pupilles rectilinéaires, de contour rectangulaire, à isopaques rectilignes, se rencontrent surtout dans les spectroscopes dont la pupille de sortie est généralement rectangulaire (réseau ou face de sortie d'un prisme). Elles sont éclairées par une fente longue et fine,

perpendiculaire à l'axe de dispersion. L'image est formée de franges parallèles à la fente objet.

Soit $f(\xi)$ l'image dans l'appareil d'une fente infiniment fine, perpendiculaire à l'axe des ξ . D'un objet ligné, par exemple une fente éclairée $O(\xi)$, non infiniment fine, perpendiculaire à l'axe des ξ , l'appareil fournit une image $E(\xi)$ et l'on a la relation :

$$E(\xi) = O(\xi) * f(\xi).$$

En passant aux transformées de FOURIER, on a :

$$\sigma(v) = S(v).G(v).$$

Mais nous avons vu que $G(v) = G(v, 0)$; par suite :

$$\sigma(v) = O(v).G(v, 0).$$

La fonction $G(v, \mu)$ n'est donc pas directement intéressante ici.

C'est $G(v, 0) =$ transformée de FOURIER de $f(\xi)$ que nous considérerons dans ce cas comme fonction de transfert.

La détermination de la fonction de transfert G par l'intermédiaire de la transformée de FOURIER de la figure de dissipation d'une ligne infiniment fine permet de préciser quelques propriétés de G que nous allons rassembler ici.

8-1-3. Symétries.

La fonction de dissipation $f(\xi)$ de la fente infiniment fine est réelle et partout positive (c'est en effet une répartition d'éclairement). Elle ne peut donc jamais être une fonction impaire. Elle est sans parité définie ou paire. Dans le premier cas, on peut la considérer comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

$$f(\xi) = 1/2(f_1 + f_2) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_1 \text{ pair} = f(\xi) + f(-\xi) \\ f_2 \text{ impair} = f(\xi) - f(-\xi). \end{cases}$$

D'une manière générale, on a :

$$\begin{aligned} G(v, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{2\pi j v \xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos 2\pi v \xi d\xi + j \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin 2\pi v \xi d\xi. \end{aligned}$$

Si $f(\xi)$ est une fonction paire, le terme en sinus est nul et $G(v, 0)$ est une fonction réelle paire.

Si $f(\xi)$ est une fonction quelconque, $f(\xi) = 1/2 (f_1 + f_2)$, la fonction $G(v, 0)$ est complexe sans parité définie ; sa partie réelle est la

transformée de FOURIER de la fonction f_1 et elle est paire ; sa partie imaginaire est la transformée de FOURIER de la fonction f_2 et elle est impaire.

De cette discussion, il ressort que $G(v,0)$ ne peut jamais être imaginaire pure. Sous une autre forme, on peut dire que $G(v,0)$ n'est jamais impaire. Cela se comprend : une fonction impaire possède une valeur nulle au centre. Or la valeur de $G(v,0)$ pour $v = 0$ représente $\int f(\xi) d\xi$, c'est à dire l'énergie lumineuse répartie sur l'image de la fente-objet, énergie qui ne saurait être nulle.

8-1-4. Cas particulier de la figure de diffraction.

Supposons maintenant que $f(\xi)$ est une figure de diffraction $I(\xi)$. Nous avons alors :

$$(6) \quad G(v,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi) \cos 2\pi v \xi \, d\xi + j \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi) \sin 2\pi v \xi \, d\xi.$$

Parités, symétries de $G(v,0)$ telles qu'elles résultent de celles de $\mathcal{C}(x,y)$, répartition d'amplitude complexe sur la pupille de sortie de l'instrument.

a) - Nous venons de voir que $G(v,0)$ ne pouvait jamais être imaginaire pur (car I n'est jamais impair).

b) - Nous allons considérer successivement le cas où $I(\xi)$ est pair par rapport à ξ ou sans parité définie par rapport à ξ .

I est pair par rapport à ξ notamment dans le cas d'une transmission pupillaire $\mathcal{C}(r)$ à symétrie circulaire (qu'elle soit réelle ou complexe) et dans celui d'une transmission rectilinéaire paire, réelle ou complexe $[\mathcal{C}(x) = T(x) \exp j\varphi(x)$ avec $T(x)$ et $\varphi(x)$ paires]. Ces cas sont très fréquemment réalisés en optique.

Si I est pair en ξ , la formule (6) montre que G est réel et pair par rapport à v .

c) - Si I est sans parité définie par rapport à ξ , la formule précédente montre que $G(v,0)$ est complexe :

- sa partie réelle est paire,
- sa partie imaginaire est impaire.

Pour que ce cas se rencontre il faut que l'amplitude diffractée $\mathcal{A}(\xi, \eta)$ soit dissymétrique par rapport à ξ . Considérons plus particulièrement les rectilinéaires. On peut alors obtenir :

$\mathcal{A}$ dissymétrique <u>réel</u> ,	si T est pair en x avec φ impair en x
$\mathcal{A}$ dissymétrique <u>imaginaire</u> ,	si T est impair en x avec φ pair en x
$\mathcal{A}$ dissymétrique <u>complexe</u> ,	si T ou bien φ sont sans parité définie par rapport à x.

Nous avons eu l'occasion de rencontrer une pupille dont la fonction de transfert était complexe avec la lame partiellement métallisée imaginée pour la mesure du déphasage. En effet, pour elle, T et φ sont sans parité définie en x.

8-2. Etude critique des méthodes de mesure possibles.

Nous avons dit que nous désirions une méthode qui nous permette de mesurer efficacement une fonction de transfert complexe. Nous allons, en conséquence, rechercher parmi les diverses méthodes possibles, celle qui semble devoir permettre une détermination précise et relativement facile non seulement de $|G(v)|$, ou de $\Re G(v)$, mais de la composante imaginaire $\Im G(v)$.

8-2-1. Les méthodes possibles.

De nombreux auteurs ont proposé des techniques expérimentales pour la mesure de la fonction de transfert mais bien peu ont effectivement mesuré une composante imaginaire. D'une manière générale, toutes ces techniques dérivent de l'un des trois procédés types suivants qui utilisent chacun une propriété particulière de la fonction de transfert:

1) Enregistrement de la fonction d'autocorrélation de l'amplitude pupillaire, cette fonction d'autocorrélation étant obtenue par un procédé interférentiel.

2) Etude du contraste de l'image d'une mire sinusoidale donnée par l'objectif étudié.

3) Obtention, par voie optique, de la transformée de FOURIER de l'image d'une fente.

8-2-2. Le premier procédé.

Ce procédé est basé sur le fait que la fonction de transfert est la fonction d'autocorrélation de l'amplitude pupillaire. Avec les pupilles circulaires et rectilinéaires, il suffit de calculer :

$$G(v, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(x, y) \cdot \mathcal{L}^*(x-v, y) dx dy.$$

Pour effectuer cette intégration, HOPMINS [5] a proposé une méthode interférométrique dont le principe est le suivant : la surface d'onde à la sortie de la pupille étudiée est divisée en deux parties à l'aide d'un diviseur de faisceau. Ces deux parties, après passage de chacune d'entre elles dans un des bras d'un interféromètre de Michelson modifié de façon à permettre le déplacement latéral d'un des faisceaux par rapport à l'autre, sont de nouveau superposées, avec un déplacement latéral connu, et interfèrent. Ce déplacement latéral est proportionnel à la fréquence spatiale v .

Si δ est la différence de marche, réglable, entre les deux faisceaux, le flux lumineux total du champ d'interférences est donné par :

$$\begin{aligned} L &= K + 2 \mathcal{R} \left[K' e^{-jk\delta} \iint_C \mathcal{L}(x, y) \cdot \mathcal{L}^*(x-v, y) dx dy \right] \quad (^{\circ}) \\ &= K + 2 \mathcal{R} \left[K' e^{-jk\delta} \mathcal{G}(v) \right] \quad \text{avec } \mathcal{G}(v) = G(v) e^{j\varphi(v)}. \end{aligned}$$

A un facteur constant près, L peut encore s'écrire :

$$L = 1 + |G(v)| \cos [k\delta - \varphi(v)].$$

En faisant $\delta=0$ et $\delta=\pi/2$, on peut obtenir les composantes réelles et imaginaires de la fonction de transfert.

Des interféromètres de ce type, réalisés par BAKER [6] d'une part et KELSALL [7] d'autre part, permirent la mesure de fonctions de transfert réelles. KELSALL indique une possibilité de mesure de la phase par comparaison avec un faisceau de référence utilisant un objectif parfait. Cette mesure relative de $\varphi(v)$ est délicate et sujette à erreurs, par exemple si les deux faisceaux ne sont pas rigoureusement parallèles. Au surplus, KELSALL ne donne pas de résultats pour la phase φ .

Ces méthodes interférométriques semblent être de mise en oeuvre délicate (cf. MARECHAL [8]) et sont difficiles à appliquer à la composante imaginaire.

(^o) C représente la partie commune des deux images de la pupille à la sortie de l'interféromètre.

8-2-3. Le deuxième procédé.

Dans ce procédé, la fonction de transfert s'obtient à partir de l'image d'une mire rectilinéaire sinusoidale. Il est facile de voir en effet que le facteur de contraste

$$C' = \frac{I_{\max.} - I_{\min.}}{I_{\max.} + I_{\min.}} \quad \text{de l'image de cette mire, dont la fréquence}$$

spatiale est v , est inférieur au facteur de contraste de la mire objet et que le rapport $\frac{C'}{C}$ est égal au module de $G(v)$.

Soit en effet $O(\xi)$ cette mire :

$$O(\xi) = 1 + C \cos 2\pi v \xi = 1 + C \mathcal{R}[\exp - 2\pi j v \xi] ;$$

soit $f(\xi)$ l'image de l'élément d'objet (o), l'image de $O(\xi)$ sera :

$$E(\xi) = O(\xi) * f(\xi), \text{ c'est à dire}$$

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi + C \mathcal{R} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1) \exp - 2\pi j v (\xi - \xi_1) d\xi_1 \\ &= 1 + C \mathcal{R} [\exp - 2\pi j v \xi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1) \exp 2\pi j v \xi_1 d\xi_1] \\ &= 1 + C \mathcal{R} [\exp - 2\pi j v \xi \cdot \mathcal{G}(v)] \text{ avec } \mathcal{G}(v) = G(v) e^{j\varphi(v)}. \end{aligned}$$

On a finalement :

$$E(\xi) = 1 + C G(v) \cos [2\pi v \xi - \varphi(v)].$$

L'image de la mire est donc une fonction sinusoidale de contraste $C' = C G(v)$. Elle est en outre déphasée par rapport à la mire objet ; son déphasage $\varphi(v)$ n'est autre que l'argument de la fonction de transfert complexe $\mathcal{G}(v) = G(v) \cdot \exp j\varphi(v)$.

Les mesures du contraste et du décalage latéral de l'image permettent d'obtenir la valeur de la fonction de transfert $\mathcal{G}(v)$ pour la fréquence v de la mire. La mesure du contraste peut se faire en explorant l'image à l'aide d'une fente fine parallèle aux traits de l'image. La mesure du déphasage $\varphi(v)$ ne peut se faire que si l'on peut effectuer une comparaison avec un objectif analogue parfait (c'est à dire pour lequel $\varphi = 0$). Il s'agit donc aussi, ici, d'une mesure "relative"

(o) Nous supposons que la transformée de FOURIER de $f(\xi)$, c'est à dire

$\mathcal{G}(v)$, est normalisée, ce qui revient à dire que

$$\mathcal{G}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi = 1.$$

avec tous les inconvénients que cela implique.

Pour obtenir la fonction de transfert par cette méthode, il faut pouvoir réaliser une variation et un repérage exact des fréquences spatiales. Dans ce but, plusieurs dispositifs expérimentaux ont été proposés et mis en pratique. Entre autres :

SHADE [9] explore une série de mires sinusoidales de pas différents à l'aide d'une fente. Ceci nécessite un très grand nombre de mires et, si les défauts des mires ne sont pas identiques, introduit des erreurs systématiques.

ROSENHAUER et ROSENBRUCH [10] emploient une mire présentant une variation continue de la fréquence en fonction de l'abscisse (perpendiculairement aux traits), enroulée sur un tambour tournant à grande vitesse. Ils ont effectivement mesuré le déphasage spatial $\phi(v)$ dans le cas d'objectif présentant des aberrations telles le coma et la courbure de champ, en mesurant sur l'écran d'un oscillographe à deux canaux le décalage du faisceau donné par l'objectif étudié par rapport au faisceau de référence provenant de l'objectif de comparaison 'parfait'. Lorsque la mire est non pas sinusoidale mais en crénaux, il faut éliminer l'influence des harmoniques de la fréquence fondamentale, par filtrage électrique du courant de cellule par exemple.

LOHMANN [11] propose une méthode utilisant les franges de MOIRÉ obtenues à l'aide de deux réseaux lignés croisés. Par simple rotation de l'un des réseaux par rapport à l'autre, il fait varier continûment la fréquence.

LACOMME [12] utilise un système à grandissement variable pour former l'image d'une mire sur la fente exploratrice.

Toutes ces méthodes dérivant du deuxième procédé de mesure donnent sans difficulté majeure le module $G(v)$ de la fonction de transfert. La mesure du déphasage $\phi(v)$ par contre, n'a été que rarement entreprise et menée à bien. La comparaison entre deux faisceaux pose en effet toujours de délicats problèmes de réglage et de reproductibilité.

8-2-4. Le troisième procédé.

Nous avons vu au paragraphe 8-1 que la fonction de transfert était la transformée de FOURIER $G(v)$ de l'image $f(\xi)$ donnée par l'ob-

jectif se forme sur une mire de transmission sinusoidale. Le flux lumineux recueilli à la sortie de la mire est proportionnel à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos[2\pi v\xi + \Phi] d\xi . \text{ Pour } \Phi = 0 \text{ et } \Phi = \pi/2, \text{ on obtient les}$$

valeurs des composantes réelles et imaginaires de $G(v)$ pour la fréquence v de la mire. Comme dans le procédé précédent, il faut, pour obtenir la fonction $G(v)$, faire varier v . Les solutions proposées sont, en fait, souvent les mêmes.

INGELSTAM [13], SHANNON et NEWMAN [14], LINDBERG [15] utilisent des séries de mires de différentes fréquences pour moduler l'image de la fente. Le nombre de fréquences étudiées est fonction du nombre de mires disponibles. SHANNON et NEWMAN présentent des résultats pour la composante imaginaire.

SUGUKI [16] d'une part et MURATA [17] d'autre part utilisent des mires de fréquence continûment variable. Il est indispensable que la variation de fréquence soit très lente pour que les résultats soient bons. Ces auteurs ne donnent pas de résultats pour la composante imaginaire.

Une méthode très séduisante, pour faire varier la fréquence, a été suggérée par HACKING dans un court article [18]. Il propose d'utiliser une seule mire sinusoidale de fréquence bien déterminée. La variation de fréquence est obtenue en faisant tourner la mire devant une fente fixe, perpendiculaire aux franges de la figure de diffraction. Les deux composantes de $G(v)$ s'obtiennent grâce à un déplacement latéral de la mire qui sélectionne les valeurs $\Phi = 0$ ou $\Phi = \pi/2$ et, fait important, la composante imaginaire s'obtient par une mesure directe, sans utilisation d'un faisceau de référence.

Cette méthode nous a semblé apte à résoudre le problème de la mesure de la phase $\varphi(x)$ introduite par les couches métalliques minces par la détermination, dans de bonnes conditions, des deux composantes de la fonction de filtrage.

De plus, les différentes corrections qui peuvent s'avérer nécessaires, sont, en général, plus faciles à effectuer pour cette méthode.

8-3. Les corrections dans les divers procédés.

Dans sa méthode interférentielle, HOPKINS envisage une correction due à la cohérence partielle des deux images interférentes. Cette correction impose une largeur limite de la fente source et une variation maximale de la différence de marche dans l'interféromètre. Dans ces conditions, il prévoit une erreur sur la fonction de transfert réelle de l'ordre de 2% pour la fréquence $\nu = 1/2$ et d'environ 10 % pour les fréquences proches de la fréquence limite. Nous verrons que dans la méthode de HACKING, l'erreur réelle est sensiblement inférieure pour cette composante.

Dans les deux autres procédés, il convient d'envisager des corrections qui sont dues aux trois mêmes causes principales suivantes :

- la largeur finie des fentes, source et de sortie ;
- les imperfections de réalisation de la mire sinusoidale ;
- la limitation de la mire.

8-3-1. Largeur finie des fentes.

Dans le cas du procédé utilisant une mire comme objet, la largeur finie de la fente de sortie se traduit par une diminution du contraste. Une correction peut facilement être faite. En effet, l'image est :

$$E'(\xi) = E(\xi) * \Pi = O(\xi) * f(\xi) * \Pi = O(\xi) * f'(\xi),$$

Π est la fonction fente, de largeur a .

En passant aux transformées de FOURIER :

$$G'(\nu) = S(\nu) \cdot G(\nu), \text{ mais } G'(\nu) = G(\nu) \cdot \text{trans. de } F\{\Pi\}.$$

La méthode fournit $G'(\nu)$ au lieu de $G(\nu)$. Pour obtenir $G(\nu)$, il suffit de diviser $G'(\nu)$ par $\frac{\sin \pi \nu a}{\pi \nu a}$.

Dans la méthode de HACKING par contre le calcul des corrections (cf. paragraphe 8-6-3) montre qu'on obtient un effet de compensation et que pour certaines valeurs des largeurs de fentes la compensation est totale.

8-3-2. Imperfections de la mire.

Du fait des imperfections de réalisation de la mire, sa transmission n'est pas exactement sinusoidale.

Lorsque la mire sert d'objet, le contraste

$$\frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

ne représente plus la valeur de $G(v)$. Il est lié, d'une façon d'ailleurs assez compliquée, à $G(v)$, $G(2v)$, $G(3v)$ ainsi qu'aux arguments $\varphi(v)$, $\varphi(2v)$, $\varphi(3v)$ Il est très difficile d'utiliser correctement la méthode si la mire n'est pas réalisée de façon quasi parfaite. Or la fabrication d'une mire de haute qualité est très délicate.

Lorsque la mire sert à moduler l'image de la fente, nous montrerons au paragraphe 8-6-2 que la composante réelle est très peu perturbée et que seule la composante imaginaire demande une correction.

8-3-3. Limitation de la mire.

LACOMME [19] a indiqué les corrections à envisager du fait de la limitation de la mire objet. La mire n'étant plus infinie, sa transformée de FOURIER ne se réduit plus à trois signaux isolés, limités aux trois fréquences $-v$, 0 , v . Le spectre s'étale légèrement autour de ces fréquences et comporte en fait trois bandes, d'autant plus étroites que le nombre de traits est plus important. En conséquence, les mesures relatives à une fréquence déterminée dépendent alors de toutes les fréquences spatiales présentes dans la mire. Une correction peut être envisagée en limitant la mire par un masque dont la transmission est une fonction de GAUSS.

Par contre, lorsque la mire est placée à la sortie, nous montrerons que l'erreur due à la limitation n'est que de quelques millièmes sur la fonction de transfert, lorsque le nombre de franges utilisées est de 16.

Conclusion. Nous voyons donc que la méthode suggérée par HACKING permet une détermination plus facile de la composante imaginaire de la fonction de transfert et que les corrections sont peu importantes et de toute façon faciles à calculer.

Nous nous sommes proposés de l'adapter, de la mettre au point pour des mesures inédites de fonctions de transfert particulières et d'étudier tout spécialement les corrections qui viennent des largeurs des fentes d'entrée et de sortie ainsi que des défauts de réalisation de la mire.

8-4. Principe détaillé de la méthode suggérée par HACKING.

Le principe de la méthode consiste à déterminer directement la transformée de FOURIER à une variable $G(v)$ de l'image $f(\xi)$ d'une fente source, fournie par l'objectif que l'on étudie. Nous avons vu que cette transformée de FOURIER était identique à la transformée de HANKEL de la répartition $I(\rho)$ de l'éclairement dans l'image d'une source ponctuelle, et qu'elle représentait par conséquent la fonction de transfert cherchée.

$$G(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{2\pi j v \xi} d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos 2\pi v \xi d\xi + j \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin 2\pi v \xi d\xi.$$

On mesure successivement $g(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos 2\pi v \xi d\xi.$

et $h(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin 2\pi v \xi d\xi.$

La figure de diffraction d'une fente source, donnée par l'objectif à l'étude, est agrandie, dans un rapport convenable, par un objectif de microscope.

Cette figure agrandie se forme dans le plan d'une mire dont la transmission $M(\xi) = a + b \cos(2\pi v \xi + \Phi)$ varie en fonction sinusoïdale de ξ .

Juste en avant de la mire se trouve une fente exploratrice perpendiculaire à la fente objet. Ainsi une étroite bande de la figure de diffraction, perpendiculaire à la direction des franges éclaire seule cette mire.

Le flux sortant, après traversée de la mire, est envoyé sur un photomultiplicateur et enregistré.

La réponse $R(v)$ de l'appareil est proportionnel à :

$$R(v) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi) [a + b \cos(2\pi v \xi + \Phi)] d\xi, \quad 2\pi \text{ étant le nombre de}$$

franges de la figure de diffraction découvertes par la longueur de la fente exploratrice.

$$R(v) = C^{te} + b \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi) \cos(2\pi v \xi + \Phi) d\xi.$$

Si n est grand, de l'ordre par exemple de $n = 16$, cette valeur est très peu différente de :

$$C^{te} + b \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos(2\pi v \xi + \Phi) d\xi .$$

Le paramètre v correspond à la fréquence de la partie utile de la mire découverte par la fente exploratrice (F.E.). On peut le faire varier

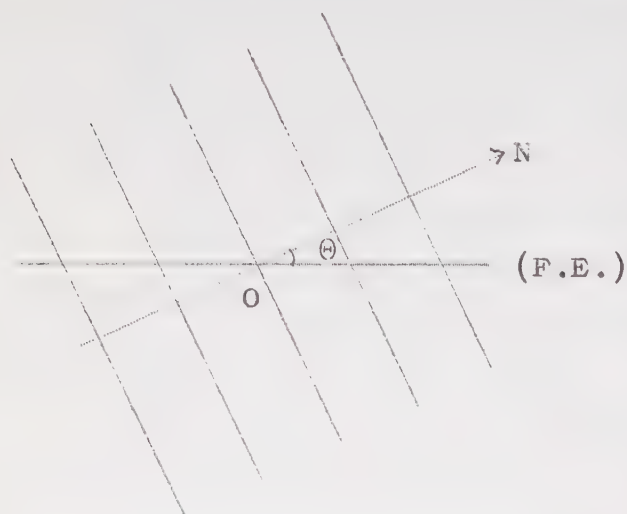


Fig. 27

par une rotation de la mire dans son plan. En effet, une rotation Θ (Θ étant l'angle de la fente exploratrice avec la perpendiculaire ON aux isopaques de la mire) fournit le long de (F.E.) une transmission sinusoïdale dont la fréquence est $v = v_m \cos\Theta$, v_m étant la fréquence propre de la mire.

Cette méthode présente donc le grand avantage de permettre l'analyse de toutes les fréquences inférieures ou égales à la fréquence propre de la mire avec une seule mire.

De plus, par un déplacement de translation de la mire dans son plan suivant une direction perpendiculaire à ses isopaques, on confère à Φ soit la valeur 0, soit la valeur $\pm \pi/2$.

Dans le premier cas, la frange centrale de la fraction passante de la figure de diffraction se trouve sur un maximum de transmission de la mire et on obtient la composante réelle de $G(v)$.

En effet, la transmission de la mire est alors représentée par :

$$M(\xi) = a + b \cos 2\pi v \xi$$

et la réponse de l'appareil est :

$$R(v) = C^{te} + b \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos 2\pi v \xi d\xi = C^{te} + b g(v).$$

Dans le deuxième cas, la frange centrale de la fraction passante de la figure de diffraction se trouve sur une ligne de transmission moyenne de la mire et l'on obtient la composante imaginaire de $G(v)$.

En effet, la transmission de la mire se représente alors par :

$$M(\xi) = a + b \sin 2\pi v \xi$$

et la réponse de l'appareil est :

$$R(v) = C^{te} + b \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin 2\pi v \xi \, d\xi = C^{te} + b h(v).$$

8-5. Montage expérimental réalisé par nous.

En nous inspirant de la méthode suggérée par HACKING, nous avons réalisé un dispositif expérimental adapté à notre problème particulier. Il s'agissait pour nous de mesurer la fonction de transfert de diverses pupilles pouvant être en particulier des lames carrées introduisant des composantes imaginaires ou des apodiseurs circulaires.

8-5-1. Description. (cf. fig. 28).

Les pupilles à l'étude sont fixées sur la monture d'un objectif de COUDER, utilisé à très faible ouverture et pratiquement sans aberrations, de distance focale 2,40 m.

L'objet linéaire est constitué par une fente (F.O.) fine, réglable de façon symétrique. Elle est située à 8,12 m de l'objectif.

L'éclairage de cette fente était d'abord réalisé par une lampe à vapeur de mercure PHILIPS SP 500 réglée et filtrée qui, pour des raisons de stabilité et d'augmentation du flux lumineux, a été remplacée par la suite par une lampe OSA à arc court. La radiation utilisée est la raie verte du mercure $\lambda = 546 \text{ m}\mu$.

L'objectif (O) forme une image de la fente source dans le plan de visée d'un objectif de microscope (MI), à la distance 3,39 m de (O).

L'objectif (MI) forme une image agrandie de la figure de diffraction sur la mire qui se trouve juste derrière la fente exploratrice (F.E.) perpendiculaire à la fente objet. La mire utilisée possède un pas de 0,63 mm, soit une fréquence de $1,59 \text{ mm}^{-1}$. Elle a été choisie de manière à ce que sa fréquence spatiale soit un peu supérieure à la fréquence limite transmise par une pupille de 24 mm située dans le plan de l'objectif (O). Dans ces conditions l'objectif de microscope a un grandissement linéaire de 8,6.

Une lentille condenseur placée derrière et presque au contact de la mire, projette le flux lumineux modulé par celle-ci sur la cathode d'un photomultiplicateur R.C.A. Elle conjugue l'objectif (MI) avec la cathode.

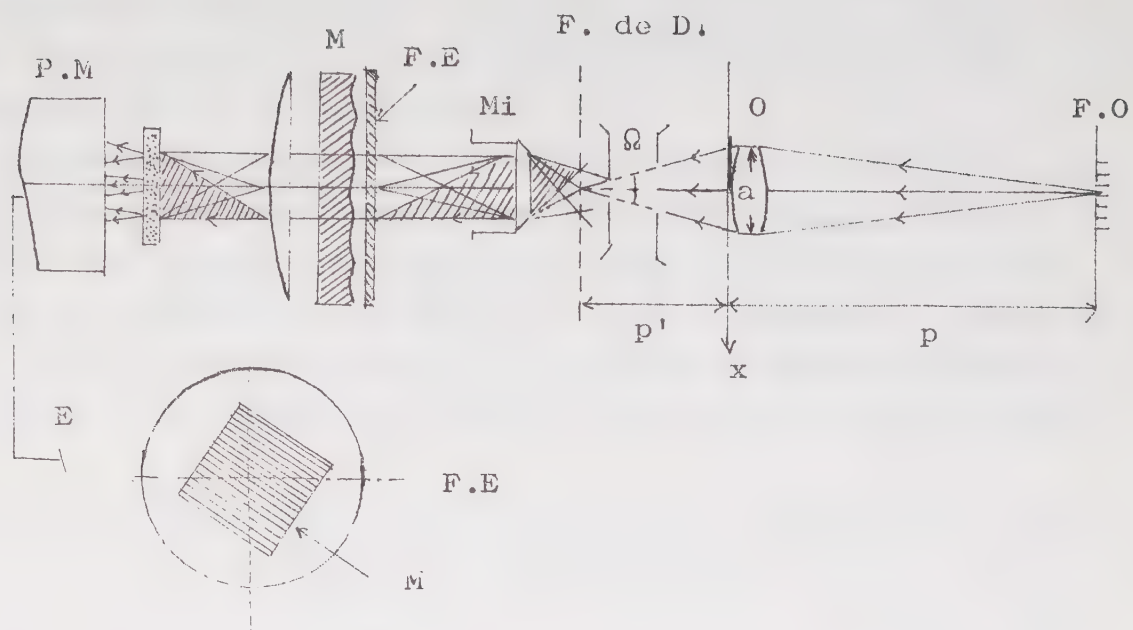


Fig. 28 : Montage optique pour la mesure de $G(v)$

Le courant de réponse du photomultiplicateur est mesuré à l'aide d'un nanoampèremètre LEMOUZY lorsqu'il s'agit simplement de déterminer l'allure d'une fonction de transfert ou enregistré par un suiveur de spot SEFRAM lorsque l'on désire une plus grande précision.

L'objectif de microscope, la fente exploratrice, la mire avec sa monture, le condenseur et le photomultiplicateur sont groupés en un seul ensemble qui se présente comme suit :

Un soubassement massif en fer à U boulonné sur un pilier forme une sorte de banc d'optique parallèle au faisceau lumineux. Sur ce banc sont fixés les supports de l'objectif (MI) et de la fente (F.E.). Ces deux supports permettent de déplacer, l'un l'objectif, l'autre la fente, dans les directions horizontales et verticales perpendiculaires à l'axe du faisceau. Les réglages se font à l'aide de vis micrométriques à pas fins.

De plus, afin de pouvoir faire coïncider rigoureusement son axe optique avec l'axe du faisceau, l'objectif de microscope peut pivoter légèrement autour de deux axes, l'un horizontal et l'autre vertical. Ces rotations sont commandées par trois vis micrométriques horizontales, parallèles au faisceau.

La monture verticale de la mire comprend essentiellement deux couronnes massives, concentriques en laiton. La couronne extérieure est fixée à l'arrière du pilier par deux grosses cornières en duralumin qui donnent toute garantie de stabilité à l'ensemble. Elle est graduée en $1/2$ degrés tandis que la couronne intérieure qui peut tourner autour de son centre porte un vernier au $1/30$.

La mire fixée dans un petit cadre métallique peut se déplacer par translation (perpendiculairement à ses isopaques) dans une glissière solidaire de la couronne intérieure. La translation de la mire est, elle aussi, commandée par une vis micrométrique.

8-5-2. Réglages.

1°) Réglages préliminaires.

L'appareil est réglé correctement lorsque l'axe du faisceau donné par l'objectif (0) coïncide avec l'axe de rotation 0 de la monture de la mire et lorsqu'il passe en outre par le centre de la fente exploratrice (F.E.) et le centre de la frange centrale de la figure de diffraction

donnée par l'objectif (MI). L'ordre des réglages est le suivant :

- centrage de l'axe de rotation de la mire qui peut être matérialisé par un petit trou axial percé dans un mandrin s'adaptant exactement au centre de la couronne mobile de la monture.

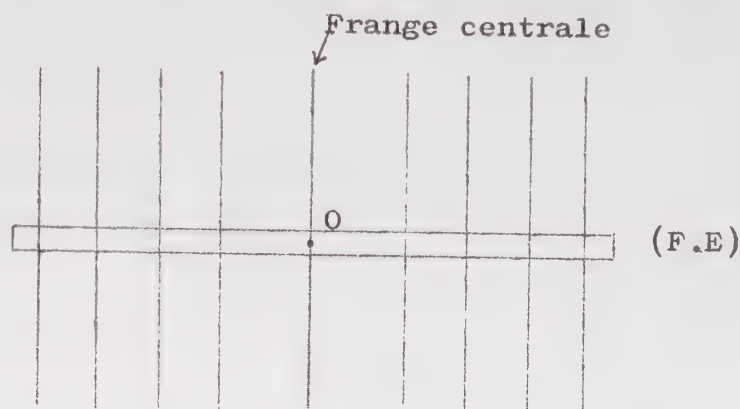


Fig. 29

- réglage de la position de la fente (F.E.) de telle sorte qu'elle passe exactement par l'axe optique. Après mise en place de l'objectif (MI), réglage de son centrage pour amener la frange centrale de la figure de diffraction sur l'axe de rotation.
- centrage horizontal de la fente (F.E.) de façon à ce qu'elle découvre le même nombre de franges de la figure de diffraction de chaque côté de la frange centrale.

Tous ces réglages préliminaires sont très délicats et demandent beaucoup de minutie et de soins.

2°) Réglages de la mire.

Ensuite, il convient de placer la mire en position de mesure : il sera toujours nécessaire de débiter par la composante réelle de la fonction de transfert.

Etudions en effet les réponses $R_1(v')$ et $R_2(v')$ de la mire correspondant aux positions respectives $\Phi = 0$ et $\Phi = \pm \pi/2$.

$$R_1(v') = af_0 + b g(v') \quad \text{avec } f_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi$$

$$R_2(v') = af_0 \mp b h(v') \quad g(v') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos 2\pi v' \xi d\xi$$

$$h(v') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin 2\pi v' \xi d\xi.$$

Considérons, en particulier, les deux fréquences extrêmes $\nu = 0$ et $\nu' = \nu'_1$:

pour $\nu' = 0$, $g(0) = f_0$ et $h(0) = 0$
 ainsi : $R_1(0) = (a+b)f_0$ et $R_2(0) = af_0$,
 pour la fréquence de coupure ν'_1 , on a par définition :

$g(\nu'_1) = 0$ et $h(\nu'_1) = 0$
 et donc : $R_1(\nu'_1) = af_0$ et $R_2(\nu'_1) = af_0$.

L'allure des courbes $R_1(\nu')$ et $R_2(\nu')$ peut donc se représenter de la façon suivante (fig. 30) :

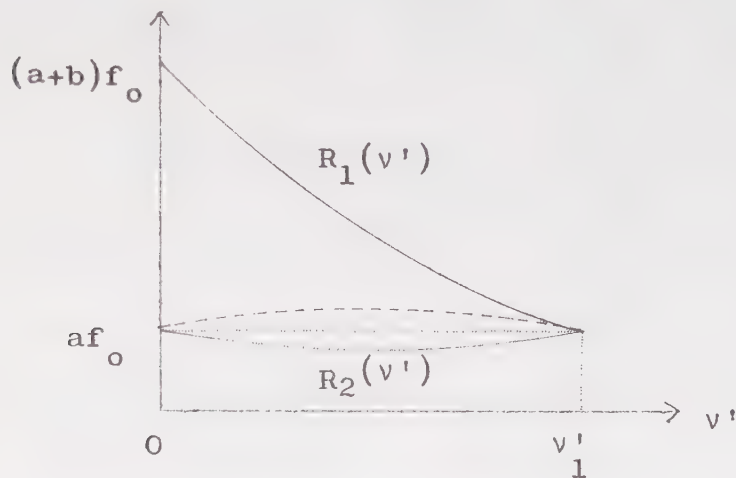


Fig. 30 : allure des courbes représentatives des réponses de l'appareil.

On remarque que la courbe $R_2(\nu')$ a la même valeur af_0 pour $\nu' = 0$ et $\nu' = \nu'_1$, valeur qui est aussi celle de la courbe $R_1(\nu')$ pour $\nu' = \nu'_1$. Nous utiliserons ces propriétés remarquables.

a) réglage de la mire pour la mesure de la composante réelle.

La mire étant dans la position $\Theta = \pi/2$ ($\nu' = 0$), c'est à dire telle que ses isopaques sont perpendiculaires aux franges de la figure de diffraction, on agit sur la vis qui commande sa translation jusqu'à obtention du maximum de déviation du spot du galvanomètre : soit $(a + b)f_0$. A ce moment la fente (F.E.) est sur un maximum de transmission de la mire. La position $\Theta = \pi/2$ a été déterminée au préalable par tâtonnements successifs et vérifiée. Il faut en effet que lorsqu'on tourne la mire d'un côté ou de l'autre, à partir de la position $\Theta = \pi/2$, la déviation du spot décroisse.

Fig. de diffraction

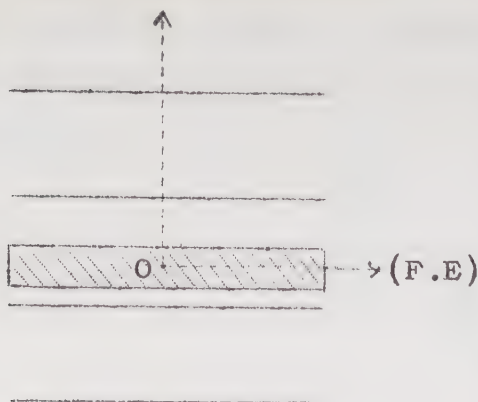


Fig. 31a : Position déréglée
de la mire pour $\theta = \pi/2$

Fig. de diffraction

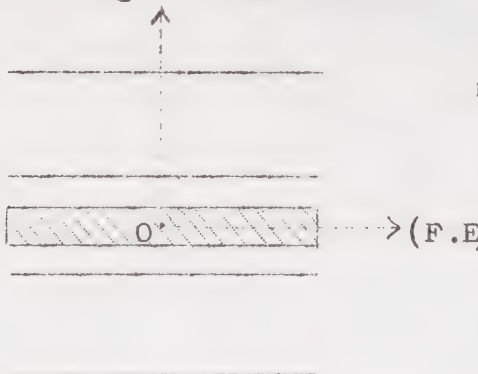


Fig. 31b : Réglage correct
pour $\theta = \pi/2$

On détermine ensuite $R_1(v')$ point par point en notant les déviations obtenues pour une suite d'orientations θ de la mire comprises entre $\pi/2$ et

$\theta_1 = \text{Arc cos } \frac{v'_1}{v'_m}$. La fréquence limite v'_1 et l'angle correspondant θ_1 ne

dependent, dans cette expérience, que de la largeur de la pupille comptée parallèlement à l'axe des ξ , et non de la forme de son contour ou de sa répartition de transparence. Une pupille rectangulaire de transparence uniforme, dont la fonction de transfert est une fonction triangle, se prête à une détermination expérimentale particulièrement précise et commode de la fréquence v'_1 (cf. paragraphe 8-7-1). Au dessus de $v' = v'_1$ la théorie indique que $R_1(v')$ devrait rester constant et égal à af_0 . On obtient en réalité de petits écarts par rapport à cette valeur, mais le début du palier se marque dans le cas de la pupille rectangulaire uniforme, par une rupture de pente particulièrement facile à repérer. C'est la valeur de v'_1 ainsi déterminée qui nous a servi dans tous les autres cas.

b) Réglage de la mire pour la mesure de la composante imaginaire.

On se place à nouveau dans la position $\theta = \pi/2$ (correspondant à $v' = 0$) et l'on cherche, par une translation de la mire, perpendiculairement à ses isopaques, à placer une ligne de transmission moyenne de la mire, telle que M, dans l'axe de la fente exploratrice. Ce résultat est obtenu lorsque la déviation du galvanomètre correspond à la valeur af_0 précédemment obtenue (mesure de la composante réelle) pour $\theta = \theta_1$.

On obtiendra ensuite la courbe $R_2(v')$ point par point en faisant tourner la mire, comme il a déjà été expliqué pour la composante réelle $R_1(v')$.

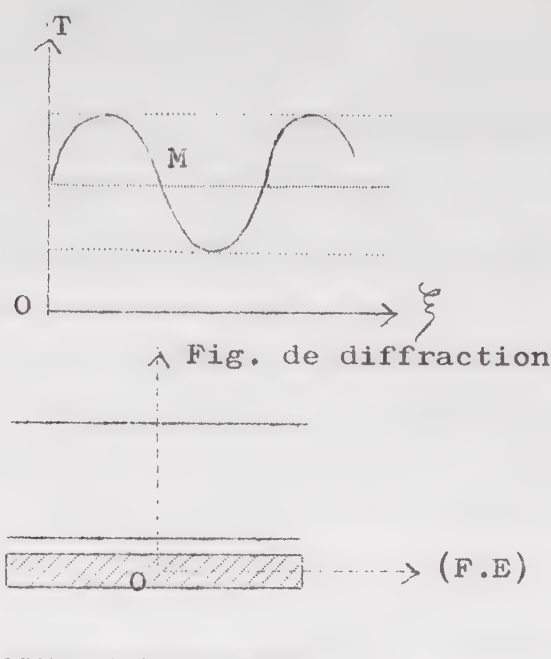


Fig. 32

N.B. : Avec les pupilles rectilinéaires et circulaires sans aberrations et correctement utilisées, la figure de diffraction est asymétrique, $h(v')$ est identiquement nul et $R_2(v')$ est pratiquement constant.

Nous disposons ici d'un test très sensible pour le contrôle du montage. En effet, l'existence d'une composante imaginaire dénote une dissymétrie donc un défaut dans le réglage du faisceau (défaut d'alignement ou orientation incorrecte d'un élément du montage).

8-5-3. Détermination de $G(v)$ à partir de $R_1(v')$ et $R_2(v')$.

La fréquence réduite v correspondant à une position θ est :

$$v = \frac{v'}{v'_1} = \frac{v'_m \cos \theta}{v'_m \cos \theta_1} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta_1} . \quad \begin{array}{l} v \text{ varie de } 0 \text{ à } 1 \text{ quand} \\ \theta \text{ varie de } \pi/2 \text{ à } \theta_1. \end{array}$$

1°) cas de la composante réelle.

On vérifie aisément que :

$$\frac{\mathcal{R}\{G(v)\}}{G(0)} = \frac{g(v)}{g(0)} = \frac{R_1(v') - R_1(v'_1)}{R_1(0) - R_1(v'_1)} .$$

2°) Cas de la composante imaginaire.

On a de même :

$$\frac{\Im\{G(v)\}}{G(0)} = \frac{\mp h(v)}{g(0)} = \frac{R_2(v'_1) - R_2(v'_1)}{R_1(0) - R_1(v'_1)} .$$

8-6. Précision à attendre de la méthode de mesure.

8-6-1. Les différentes causes d'erreurs.

Les causes d'erreurs qui peuvent se présenter sont nombreuses et d'importance variable.

Pour certaines de ces causes, on peut déterminer ou évaluer les corrections à apporter à la mesure. Citons principalement les imperfections de réalisation de la mire, la largeur finie des fentes source et exploratrice et la limitation de la mire. Il s'agit là d'erreurs systématiques.

Les erreurs dûes à d'autres causes ne peuvent être qu'évaluées en fonction des écarts existants entre plusieurs mesures successives des grandeurs en cause. Elles sont, entre autres, causées par les vibrations, les fluctuations de la source, les défauts de centrage des divers éléments du montage et les incertitudes sur la position de la mire. Les défauts de centrage peuvent, par des réglages très fins et très précis être éliminés presque complètement. Les vibrations, par contre, ont un effet néfaste sur la position de la mire surtout lorsque le centre de rotation se trouve sur un point de transmission moyenne. C'est autour de ce point que la transmission de la mire varie le plus. En conséquence, on peut dire que si le déplacement du centre de rotation s'est effectué vers les transmissions plus grandes, la valeur des points correspondant aux fréquences basses et moyennes est majorée ; au contraire, si le déplacement s'est fait vers les transmissions plus faibles, la valeur trouvée pour les fréquences basses et moyennes est trop faible. Finalement, la présence de ces erreurs accidentelles se traduit par une incertitude sur les courbes représentatives des fonctions de transfert. Avec notre montage, tel qu'il était réalisé, cette incertitude était de l'ordre de 2/100 environ dans le cas de la composante réelle et de 6/100 environ dans le cas de la composante imaginaire.

Examinons maintenant les différentes erreurs systématiques.

Dans le cas de notre montage, la limitation de la mire se traduit en fait par la limitation de la longueur de la fente exploratrice et, en fin de compte, revient à limiter la figure de diffraction à 8 franges de part et d'autre de la frange centrale. Ceci revient à convoluer $G(v)$ avec la transformée de FOURIER de la fonction $\text{rect. } \xi/16$, c'est à dire avec $\frac{\sin 16\pi v}{16\pi v}$ qui diffère peu d'une fonction delta. Si nécessaire, on pourrait effectuer la correction. Nous avons calculé l'erreur qui en résultait dans le cas de la pupille rectilinéaire uniforme ; elle est inférieure à 2/1000 en moyenne. Elle sera du même ordre avec les autres pupilles et pourra être négligée.

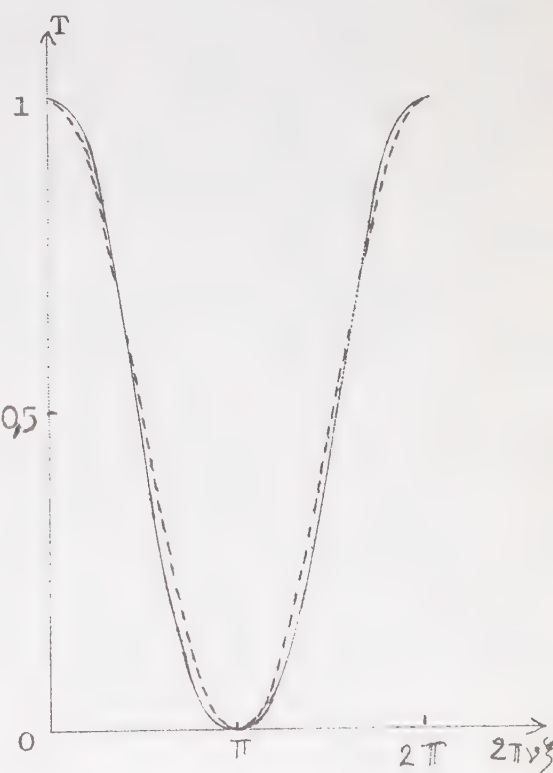
Nous allons étudier plus spécialement l'influence des imperfections de réalisation de la mire et la correction à apporter du fait de la largeur finie des fentes.

8-6-2. Influence des imperfections de réalisation de la mire.

Fig. 33

Courbe représentant la transmission réelle de la mire.

En pointillé la transmission idéale (sinusoïde).



On sait que, théoriquement, la transmission de la mire est sinusoïdale et de la forme :

$$M(\xi) = a + b \cos(\omega \xi + \Phi) \text{ avec } \omega = 2\pi v_m \text{ et } v_m = \frac{1}{p}.$$

Mais en pratique, la transmission n'est pas rigoureusement sinusoidale. La figure 33 présente la courbe $M(\xi)$ réelle qui fut déduite du microdensitométrage de la reproduction de la mire que nous avons utilisée. On remarque que les transmissions faibles sont trop petites.

Note.

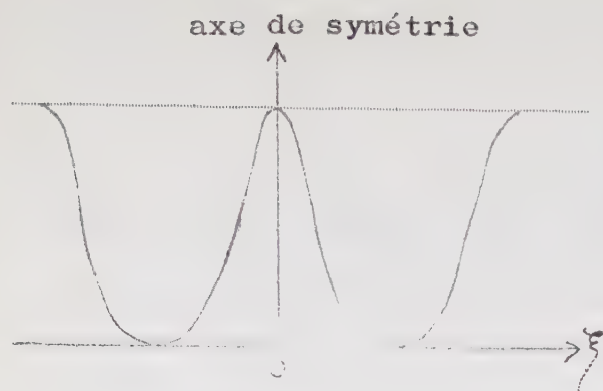
La mire initiale nous avait été fournie par la Technicolor Corporation qui l'avait fabriquée sous la direction de D.H. KELLY. Elle présentait un encombrement et un poids gênants pour la stabilité et la précision des réglages. Elle était, en effet, supportée par une plaque de verre de 30 x 10 cm et comportait 10 plages dont les pas variaient de 0,31 mm à 12,5 mm.

Or, pour nos travaux, et compte tenu des dimensions géométriques de notre montage, il nous fallait utiliser exclusivement la plage N° 9 de pas 0,63, soit une petite portion de la plaque.

D'où l'idée de reproduire cette mire N°9 sur un film et d'obtenir ainsi un dispositif très léger et de dimensions réduites. Disons simplement que la reproduction de cette mire a nécessité de nombreux essais dont les résultats ont été contrôlés au microdensitomètre.

Si γ' est la pente de la partie rectiligne de la caractéristique de HURTER et DRIFFIELD de l'émulsion utilisée pour l'obtention du négatif, γ'' celle de l'émulsion utilisée pour le tirage du positif, il faut, pour que la reproduction ait une transmission sinusoidale comparable à l'original, que $\gamma' \gamma'' = 1$.

Nous sommes arrivés à un très bon résultat, en effectuant le tirage négatif sur film KODAK PlusX, développé au Microdal (γ' voisin de 0,35). Le tirage positif a été fait sur film Kodak Microfile-ortho, développé dans un révélateur normal (γ'' voisin de 2,9). La mire obtenue possède une transmission approximativement sinusoidale mais il est remarquable de noter que les écarts avec une sinusoidale sont moindres que sur l'original.



L'arche de la courbe présente une symétrie par rapport à un axe, parallèle à l'axe des ordonnées, passant par l'un de ses sommets. Il n'existe plus de symétrie, comme c'est le cas avec une sinusoïde, par rapport à un axe parallèle à l'axe des abscisses, passant par l'ordonnée moyenne.

Fig. 34 - Symétrie de la mire

a) Influence de ces défauts sur la composante réelle de la fonction de transfert.

Dans la position $\Phi = 0$ de la mire, la fonction de transmission de la mire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et peut s'écrire :

$M(\xi) = a + b m(\xi)$ où $m(\xi)$ est une fonction périodique, de période p égale à celle de la mire, et satisfaisant aux conditions : $m(\xi) = m(-\xi)$ et $-1 \leq m(\xi) \leq +1$.

On peut décomposer $m(\xi)$ en série de FOURIER, en remarquant que les termes en sinus sont nuls du fait de la symétrie de $m(\xi)$.

$$m(\xi) = A_0 + A_1 \cos \omega \xi + A_2 \cos 2\omega \xi + A_3 \cos 3\omega \xi + \dots$$

avec

$$A_0 = \frac{1}{p} \int_0^p m(\xi) d\xi$$

$$A_1 = \frac{2}{p} \int_0^p m(\xi) \cos \omega \xi d\xi$$

$$A_2 = \frac{2}{p} \int_0^p m(\xi) \cos 2\omega \xi d\xi$$

$$\dots\dots\dots$$

Le calcul de ces intégrales peut se faire par intégration graphique et on trouve :

$$m(\xi) = -0,032 + 1,075 \cos \omega \xi + 0,045 \cos 2\omega \xi - 0,044 \cos 3\omega \xi + \dots$$

Le montage, au lieu de donner $g(v) = \int f(\xi) \cos \omega \xi d\xi$, donne : $g'(v) = \int f(\xi) m(\xi) d\xi$, ce qui à une constante additive près, peut s'écrire :

$$g'(v) = \int f(\xi) \cos w\xi \, d\xi + \frac{0,045}{1,075} \int f(\xi) \cos 2w\xi \, d\xi - \frac{0,044}{1,075} \int f(\xi) \cos 3w\xi \, d\xi + \dots$$

Mais $\int f(\xi) \cos 2w\xi \, d\xi = \int f(\xi) \cos 2\xi (2v)\xi \, d\xi$: ceci représente la composante réelle de la fonction de transfert comprimée entre les limites $v = \pm 1/2$. Soit $g_1(v)$ cette fonction : $g_1(v) = g(2v)$.

De même, $\int f(\xi) \cos 3w\xi \, d\xi$ représente la composante réelle de $G(v)$ comprimée entre les limites $v = \pm \frac{1}{3}$. Soit $g_2(v)$ cette fonction :

$$g_2(v) = g(3v) \quad . \text{ Finalement : }$$

$$g'(v) = g(v) + 0,042 g_1(v) - 0,041 g_2(v) + \dots$$

b) Influence des défauts de la mire sur la composante imaginaire de la fonction de transfert.

$$\Phi = \pm \frac{\pi}{2} \quad . \text{ Prenons } \Phi = + \frac{\pi}{2} \quad .$$

La transmission de la mire, dans cette position, devrait être

$$M(\xi) = a - b \sin w\xi \quad .$$

En réalité, on a : $M(\xi) = a + b m'(\xi)$.

Décomposons $m'(\xi)$ en série de FOURIER :

$$m'(\xi) = B_0 + B_1 \cos w\xi + B_2 \cos 2w\xi + B_3 \cos 3w\xi + \dots + C_1 \sin w\xi + C_2 \sin 2w\xi + C_3 \sin 3w\xi + \dots$$

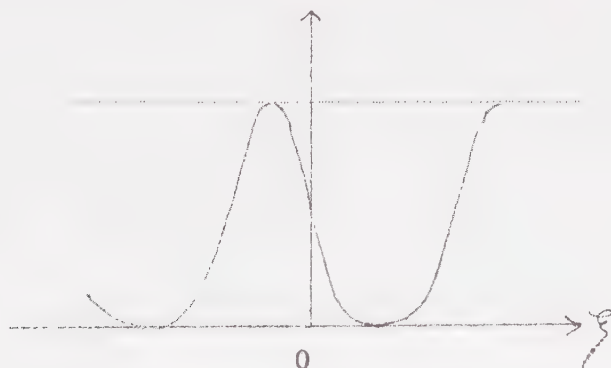


Fig. 35 : absence de symétrie

Ici, nous avons des termes en sinus et des termes en cosinus car $m'(\xi)$ ne présente plus de symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et pas de symétrie par rapport au centre des axes.

$$B_0 = \frac{1}{p} \int_0^p m'(\xi) d\xi = A_0$$

$$B_1 = \frac{2}{p} \int_0^p m'(\xi) \cos \omega \xi d\xi \quad C_1 = \frac{2}{p} \int_0^p m'(\xi) \sin \omega \xi d\xi$$

$$B_2 = \frac{2}{p} \int_0^p m'(\xi) \cos 2\omega \xi d\xi \quad C_2 = \frac{2}{p} \int_0^p m'(\xi) \sin 2\omega \xi d\xi$$

.....

.....

Le calcul de ces termes, par intégration graphique effectuée à partir d'un enregistrement de $M(\xi)$ donne :

$$m'(\xi) = -0,032 + 0,071 \cos \omega \xi - 0,043 \cos 2\omega \xi + 0,0014 \cos 3\omega \xi + \dots \\ - 1,160 \sin \omega \xi + 0,0014 \sin 2\omega \xi - 0,024 \sin 3\omega \xi + \dots$$

Nos expériences nous fournissent donc, non pas :

$h(v) = \int f(\xi) \sin \omega \xi d\xi$ mais $h'(v) = \int f(\xi) m'(\xi) d\xi$, ce qui, à une constante additive près, peut s'écrire :

$$h'(v) = \int f(\xi) \sin \omega \xi d\xi - \frac{0,0014}{1,160} \int f(\xi) \sin 2\omega \xi d\xi + \\ + \frac{0,024}{1,160} \int f(\xi) \sin 3\omega \xi d\xi + \dots \\ - \frac{0,071}{1,160} \int f(\xi) \cos \omega \xi d\xi + \frac{0,043}{1,160} \int f(\xi) \cos 2\omega \xi d\xi - \\ - \frac{0,0014}{1,160} \int f(\xi) \cos 3\omega \xi d\xi + \dots$$

On trouve finalement :

$$h'(v) = h(v) - 0,0012 h_1(v) + 0,020 h_2(v) + \dots \\ - 0,061 g(v) + 0,043 g_1(v) - 0,0012 g_2(v) + \dots$$

où $h_1(v)$ désigne la composante imaginaire de $G(v)$ comprimée entre les limites $v = \pm \frac{1}{2}$, $h_1(v) = h(2v)$, $h_2(v)$ désigne la composante imaginaire de $G(v)$ comprimée entre les limites $v = \pm \frac{1}{3}$, $h_2(v) = h(3v)$ et où $g, g_1, g_2 \dots$ ont la même signification qu'au paragraphe précédent.

c) Valeur des corrections.

Cas de la composante réelle. La correction est rigoureusement nulle, quelle que soit la mire, entre $v = 1/2$ et $v = 1$ parce que g_1, g_2 etc.. sont identiquement nuls.

Pour $v = 0$, la correction est pratiquement nulle, pour notre mire, parce que les coefficients qui multiplient $g_1(0)$ et $g_2(0)$ sont presque opposés.

Entre $v = 0$ et $v = 1/2$, la correction n'est pas nulle ; elle dépend de $g(v)$ c'est à dire du type de pupille considérée.

Nous avons calculé ce qu'elle vaudrait pour une pupille rectilinéaire uniforme. Elle atteint au maximum $1/100$ et ce, aux environs de $v = 1/3$ (cf. fig. 36).

Pour la plupart des pupilles, les résultats seront du même ordre. On peut donc dire que dans le cas de la composante réelle, la fonction $g'(v)$ mesurée représentera $g(v)$ avec une très bonne approximation.

Cas de la composante imaginaire. Les résultats sont beaucoup moins favorables. En effet, si les termes en h_1 , h_2 et g_2 ont de faibles coefficients, pour notre mire, et donnent des corrections négligeables, il n'en est malheureusement pas de même pour les termes en g et g_1 . Nous pourrions écrire pour $h'(v)$:

$$h'(v) = h(v) - 0,061 g(v) + 0,043 g_1(v).$$

Mais puisque $g'(v)$ est très peu différent de $g(v)$, nous aurons une bonne évaluation de $h(v)$ si nous calculons :

$$h(v) = h'(v) + 0,061 g'(v) - 0,043 g'(2v).$$

Nous donnerons un exemple de correction dans le cas de la composante imaginaire de $G(v)$ lors de l'étude de la précision obtenue sur la mesure du déphasage $\varphi(x)$ subi par la lumière à la traversée d'une couche métallique mince, cf. parag. 8-8-3.

8-6-3. Influence de la largeur finie de la fente source et de la fente de sortie sur la fonction de transfert.

La théorie de la méthode de mesure exposée plus haut supposait que les fentes source et exploratrice étaient infiniment fines. Dans le montage expérimental, il ne peut en être ainsi. On est obligé de donner aux fentes des largeurs finies non nulles telles que le flux lumineux qu'elles laissent passer soit suffisant pour les mesures.

Il est important de déterminer l'influence de cette largeur non nulle des fentes sur les fonctions de transfert et surtout de préciser quelles sont les largeurs les plus favorables.

1°) Influence de la largeur de la fente de sortie.

Soit r la largeur de la fente. $f(\xi)$ est la figure de diffraction de la fente source projetée dans le plan de la mire.

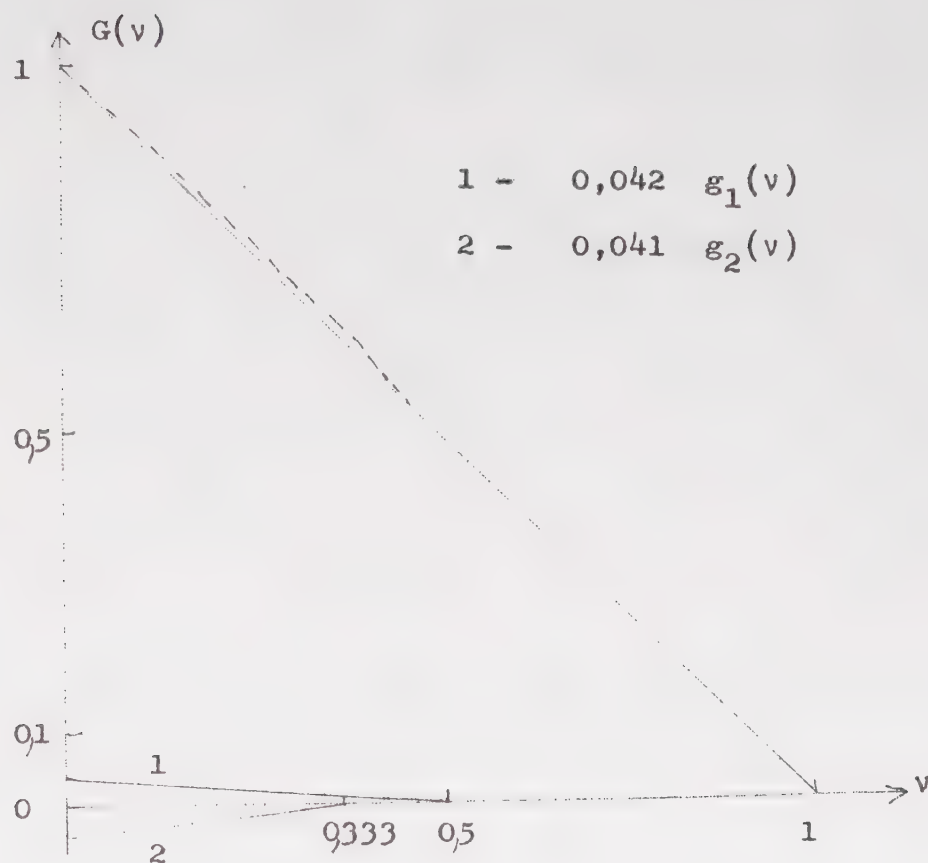


Fig. 36 : Corrections dues aux imperfections de la mire dans le cas de la fonction de transfert de la pupille rectilinéaire uniforme (composante réelle).
En pointillé courbe obtenue sans tenir compte des corrections

Deux cas sont à envisager :

a) le maximum de transmission de la mire est sur le centre de la figure de diffraction : c'est le cas où l'on mesure la composante réelle de la fonction de transfert.

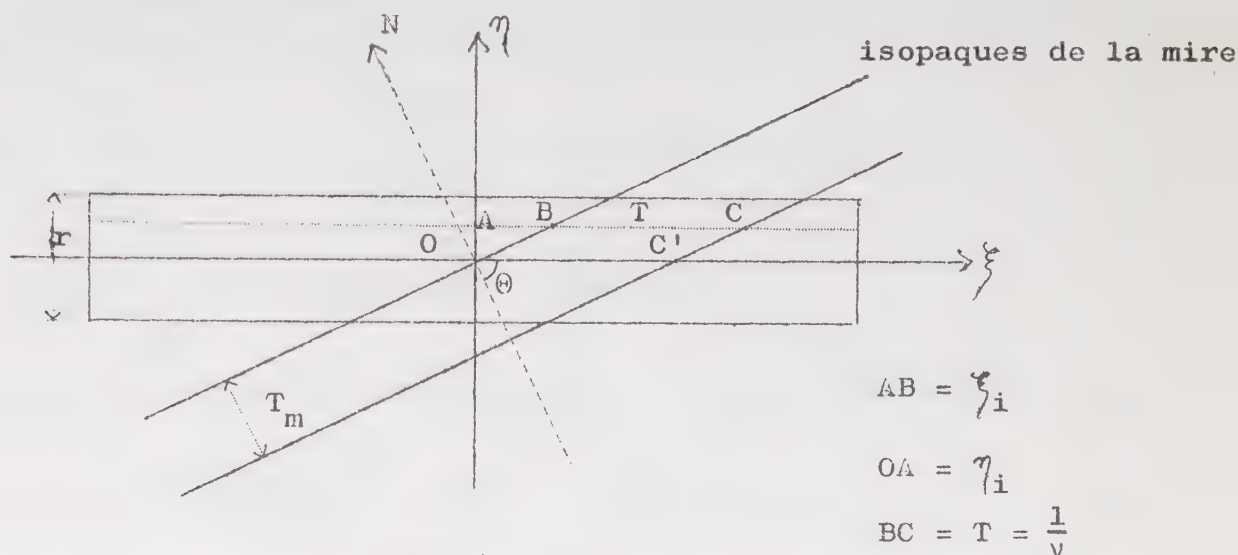


Fig. 37

Pour une orientation arbitraire (et quelconque) de la mire, les franges de la figure de diffraction ne sont pas parallèles aux isopaques de la mire, de sorte que les tranches successives $d\eta$ de ces franges ne sont pas modulées toute en phase par la mire. Cette dispersion de phase nulle lorsque $\theta = \pi/2$ c'est à dire pour $v = 0$, augmente lorsque θ décroît, c'est à dire lorsque $v = v_m \cos\theta$ augmente.

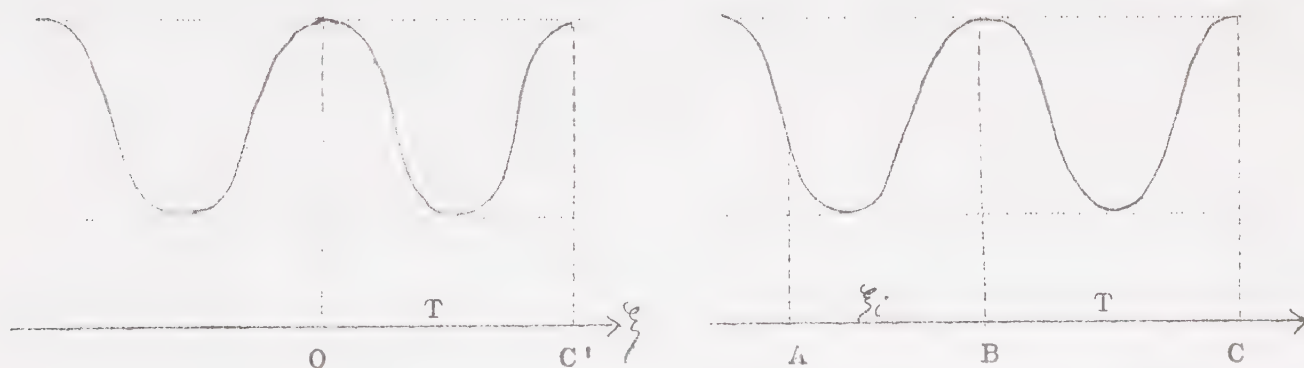


Fig. 38

Mire : sa section par l'axe des ξ . Sa section par l'axe $\eta = \eta_i$

Dans une tranche de la fente de sortie de largeur $d\eta$, axée sur 0ξ , on recueille le flux suivant en chaque point $dL(\xi) = (a + b \cos 2\pi v \xi) f(\xi) d\eta = a f(\xi) d\eta + b f(\xi) \cos 2\pi v \xi d\eta$. Par contre, si la tranche $d\eta$ est centrée sur l'axe $\eta = \eta_i \neq 0$, on recueille

$dL(\xi) = a f(\xi) d\eta + b f(\xi) \cos 2\pi v(\xi - \xi_i) d\eta$ avec $\xi_i = \eta_i \operatorname{tg} \theta$. Au total, on recueille dans une fente de largeur r :

$$\begin{aligned} L(\xi) &= a \int_{-r/2}^{r/2} f(\xi) d\eta + b \int_{-r/2}^{r/2} f(\xi) \cos 2\pi v(\xi - \eta \operatorname{tg} \theta) d\eta \\ &= K + b \int_{-r/2}^{r/2} f(\xi) \cos 2\pi v(\xi - \eta \operatorname{tg} \theta) d\eta. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = \eta \operatorname{tg} \theta$, on trouve :

$$L(\xi) = K + rb \frac{\sin(\pi v r \operatorname{tg} \theta)}{\pi v r \operatorname{tg} \theta} f(\xi) \cos 2\pi v \xi.$$

La réponse de l'appareil sera :

$$R(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi) d\xi = K' + rb \frac{\sin(\pi v r \operatorname{tg} \theta)}{\pi v r \operatorname{tg} \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos 2\pi v \xi d\xi.$$

Mais $v = v_m \cos \theta$, $v \operatorname{tg} \theta = v_m \sin \theta$.

$$R(v) = K' + rb \frac{\sin(\pi r v_m \sin \theta)}{\pi r v_m \sin \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos 2\pi v \xi d\xi.$$

rb étant une constante, le facteur correctif pour la composante réelle de la fonction de transfert est donc :

$$\frac{\sin(\pi r v_m \sin \theta)}{\pi r v_m \sin \theta}.$$

b) Un point de transmission moyenne de la mire est sur le centre de la figure de diffraction : c'est le cas où l'on mesure la composante imaginaire de la fonction de transfert.

En partant cette fois de

$dL(\xi) = a f(\xi) d\eta - b f(\xi) \sin 2\pi v(\xi - \xi_i) d\eta$, un raisonnement identique permet de montrer que l'on obtient la même correction que

dans le cas de la composante réelle.

2°) Influence de la largeur de la fente-source.

a) supposons d'abord la fente de sortie infiniment fine, de largeur $d\eta = \varepsilon$.

Si la fente source est infiniment fine, l'expérience donne $g(v) = \varepsilon a \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi + \varepsilon b \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos 2\pi v \xi d\xi$ pour la composante réelle par exemple.

Si la fente source possède une certaine largeur s , on peut l'assimiler à un objet étendu. Soit $E(\xi)$ l'image de diffraction de cette fente donnée par l'objectif. On obtient :

$$g_1(v) = \varepsilon a \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi) d\xi + \varepsilon b \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi) \cos 2\pi v \xi d\xi = C^{te} + \varepsilon b g'_1(v) \text{ où}$$

$g'_1(v)$ est la partie réelle de la transformée de FOURIER de $E(\xi)$,
Mais $E(\xi) = \text{rect.} \frac{\xi}{s} * f(\xi)$ où $\text{rect.} \frac{\xi}{s}$ désigne la fonction égale à 1 pour $|\xi| \leq \frac{s}{2}$, et à zéro en dehors. Il en résulte entre les transformées de FOURIER $g'_1(v)$, $S(v)$ et $G(v)$ de ces fonctions la relation :

$$g'_1(v) = S(v) \cdot G(v) = s \frac{\sin \pi v s}{\pi v s} \cdot G(v). \text{ Et on a :}$$

$$g_1(v) = C^{te} + \varepsilon b s \frac{\sin \pi v s}{\pi v s} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos 2\pi v \xi d\xi.$$

Pour la composante imaginaire de la fonction de transfert on obtient la même terme correctif : $\frac{\sin \pi v s}{\pi v s}$.

b) La fente de sortie possède une largeur finie r .

L'expérience donne pour la composante réelle :

$$\begin{aligned} H(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-r/2}^{r/2} a E(\xi) d\eta + \int_{-r/2}^{r/2} b E(\xi) \cos 2\pi v (\xi - \xi_i) d\eta \right] d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ar E(\xi) + br \frac{\sin(\pi r v_m \sin \theta)}{\pi r v_m \sin \theta} E(\xi) \cos 2\pi v \xi \right] d\xi \\ &= C^{te} + br \frac{\sin(\pi r v_m \sin \theta)}{\pi r v_m \sin \theta} \cdot s \frac{\sin \pi v s}{\pi v s} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos 2\pi v \xi d\xi. \end{aligned}$$

Pour la composante imaginaire, on trouve la même correction :

3°) Discussion.

La correction totale, en négligeant le facteur constant brs, est :

$$C(v) = \frac{\sin(\pi r v_m \sin\theta)}{\pi r v_m \sin\theta} \cdot \frac{\sin(\pi s v_m \cos\theta)}{\pi s v_m \cos\theta}$$

Comme on s'y attendait, les deux fentes jouent un rôle analogue. Leur orientation à 90° l'une de l'autre explique les termes en $\sin\theta$ et $\cos\theta$ de $C(v)$. Ces arguments en $\sin\theta$ et $\cos\theta$ varient en sens inverse avec θ , donc avec v et l'on peut espérer un effet de compensation.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\pi r v_m \sin\theta)}{\pi r v_m \sin\theta} & \text{ peut s'écrire : } \frac{\sin(\pi r v_m \sqrt{1-\cos^2\theta})}{\pi r v_m \sqrt{1-\cos^2\theta}} \\ & = \frac{\sin(\pi r \sqrt{v_m^2 - v^2})}{\pi r \sqrt{v_m^2 - v^2}} \end{aligned}$$

Le terme correctif $C(v)$ devient :

$$C(v) = \frac{\sin \pi v s}{\pi v s} \cdot \frac{\sin(\pi r \sqrt{v_m^2 - v^2})}{\pi r \sqrt{v_m^2 - v^2}}.$$

Nous avons calculé les valeurs de $C(v)$ pour v variant de 0 à 1 et r et s variant de 0 à 1 interfrange.

Les courbes de la fig. 39 montrent que pour $r = s = 0,25$ la valeur du terme correctif est pratiquement constante et ne dépend plus de v . Cette valeur est 0,889 à 1/1000 près.

Ces largeurs de fente de 0,25 interfrange laissent passer un flux lumineux suffisant pour faire travailler le photomultiplicateur dans des conditions encore satisfaisantes.

Compte tenu des dimensions géométriques du montage, cette valeur de 1/4 d'interfrange correspond à une largeur de 0,05 mm pour la fente source et à une largeur de 0,17 mm pour la fente de sortie. Ce sont ces valeurs que nous avons adoptées.

Pour clore cette étude de l'influence de la largeur des fentes, on peut dire que, pour les réglages utilisés, la correction se réduit à un terme constant que l'on peut négliger puisque de toute façon, la mesure

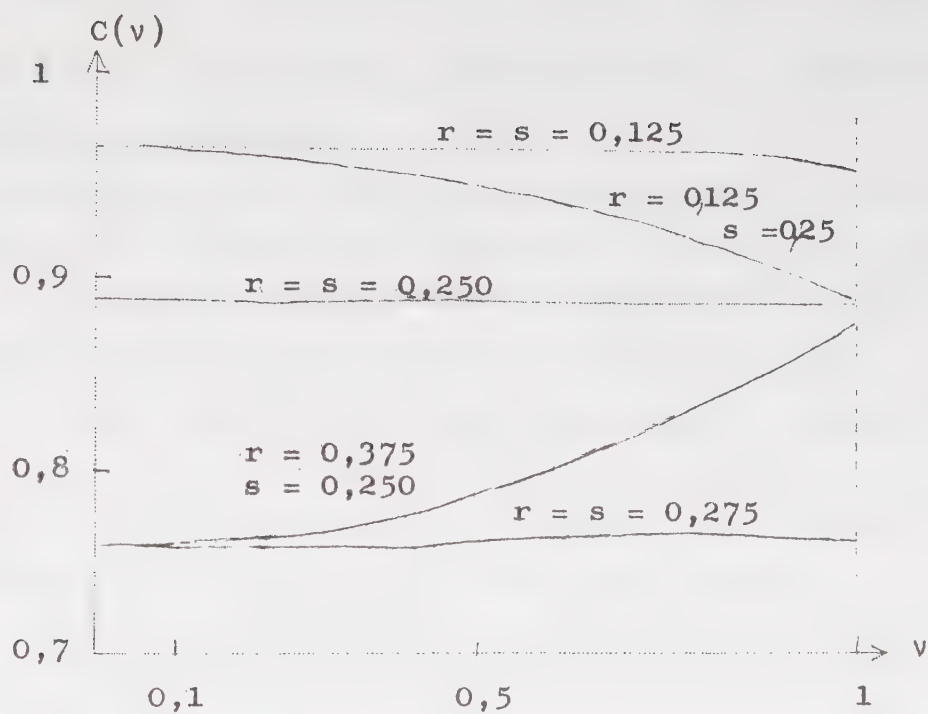


Fig. 39 : Courbes représentatives de la correction à effectuer sur la fonction de transfert pour diverses largeurs des fentes.

donne les composantes de la fonction de transfert à une constante multiplicative près.

En conclusion, si l'on adopte dans ce montage des fentes de largeur réduite $r = s = 0,25$, la seule correction à envisager provient des défauts de transmission de la mire. Cette correction est nulle de $v = 1/2$ à $v = 1$; de $v = 0$ à $v = 1/2$ elle n'affecte appréciablement que la composante imaginaire de la fonction de transfert. Elle est dans tous les cas calculable, à partir des valeurs approchées obtenues expérimentalement pour $\Re\{G(v)\}$ et $\Im\{G(v)\}$ respectivement.

8-7. Contrôle de la méthode. Détermination de la fréquence de coupure expérimentale.

La détermination par la méthode ci-dessus des fonctions de transfert de pupilles de transmission uniforme et de contour rectangulaire, circulaire ou annulaire nous a permis de tester le procédé.

8-7-1. Pupille carrée de transmission uniforme.

La courbe représentative théorique est une droite. Il est donc facile de vérifier la courbe expérimentale obtenue. On voit, sur la fig. 40 que la concordance des deux courbes est excellente.

Détermination de la fréquence de coupure expérimentale.

C'est également sur cette courbe de transfert que la détermination de la fréquence de coupure expérimentale était la plus commode à réaliser. On remarque, en effet, que pour $v = v_1 = 1$, la courbe n'est pas tangente à l'axe des v mais qu'elle y aboutit en faisant un angle net. Ceci n'est pas le cas des courbes obtenues avec les pupilles circulaires elles tangentent l'axe en $v = 1$. La coupure est donc, dans le cas de la pupille carrée, beaucoup plus nette à observer quand on fait varier v .

La fréquence de coupure est donnée par :

$v_1' = v_m \cos \theta_1$, θ_1 angle limite de rotation de la mire correspondant à la fréquence de coupure.

Dans nos premières expériences, nous avons trouvé une valeur θ_1 voisine de 20° ; nous avons dans la suite adopté exactement cette valeur, en réglant de façon appropriée le grandissement de l'objectif de microscope qui fournit l'image $f(\xi)$ définitive.

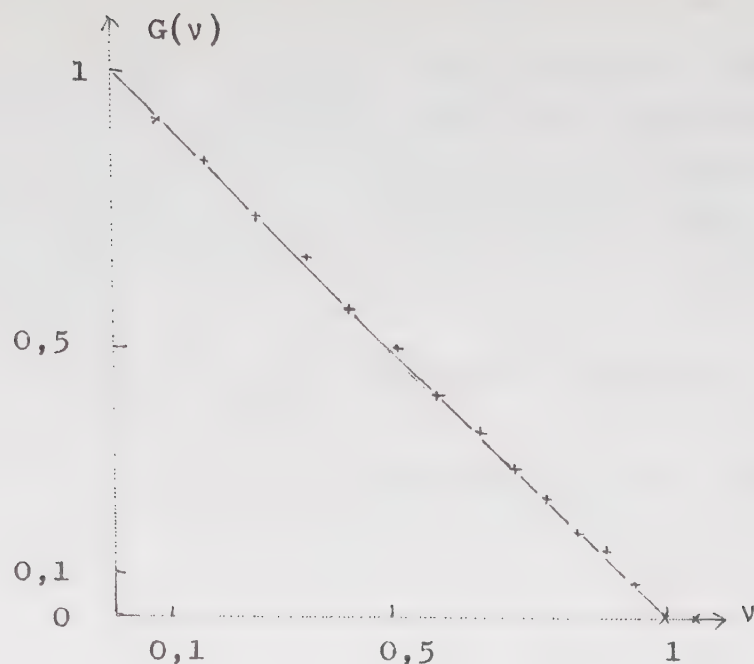


Fig. 40 : Fonction de transfert d'un objectif parfait, de contour carré et de transparence uniforme. Points expérimentaux.

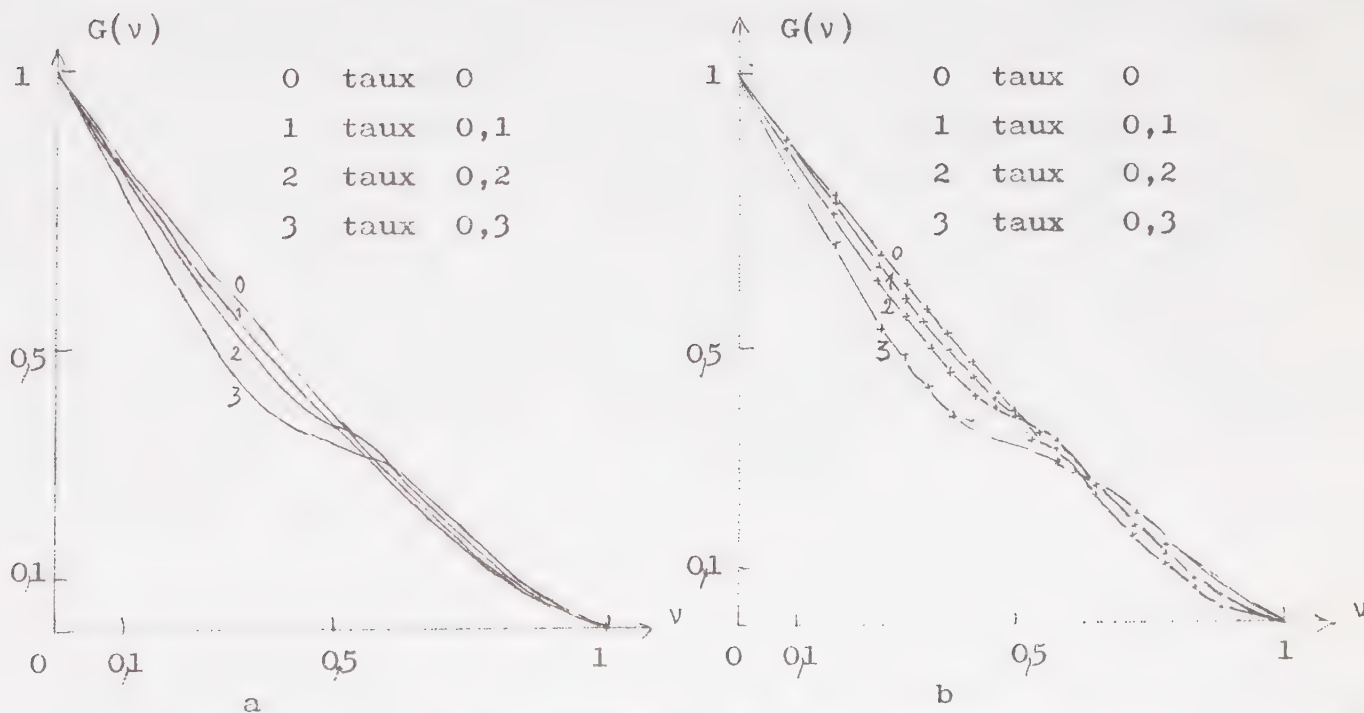


Fig. 41 a et b : Fonctions de transfert de la pupille circulaire uniforme sans et avec obturation centrale.

a) d'après le calcul

b) d'après les résultats de nos expériences.

8-7-2. Pupilles circulaires et annulaires, uniformes.

La fig. 41 a et b représente les courbes de transfert calculées et expérimentales de la pupille circulaire uniforme, en absence de disque obturateur central et en présence d'un tel disque pour les trois taux d'obturation 0,1, 0,2 et 0,3. On voit qu'ici aussi, l'accord entre les courbes expérimentales et [] les courbes calculées est très bon.

8-7-3. Altération de la fonction de transfert en présence d'un défaut de mise au point.

A titre de vérification supplémentaire nous avons déterminé par cette méthode, les transformées de FOURIER $G'(v)$ de l'intensité $I'(\xi)$ que l'on obtient en présence d'un défaut de mise au point.

L'étude théorique de ce problème a été faite par HOPKINS [20] Il montre que l'image dans ce cas est identique à celle qu'on obtiendrait au foyer d'une pupille dont la transmission en amplitudes serait :

$$A(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{j8\pi}{\lambda}(x^2+y^2)} W_{20} & \text{pour } x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Le coefficient W_{20} mesure la défocalisation ; c'est la différence de marche marginale entre l'onde défocalisée (sphère O' , $O'E$) et la sphère de référence (C , CE) (fig. 42)

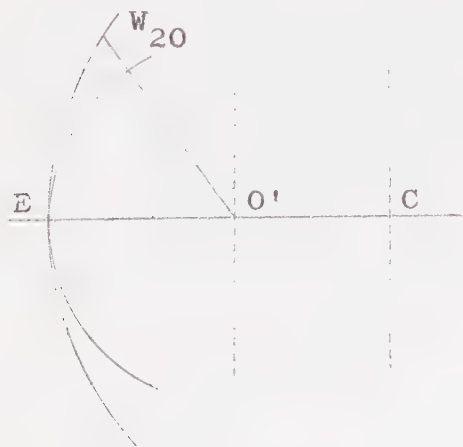


Fig. 42

Si $\delta z = CO'$, la défocalisation est donnée par $W_{20} = 2n' \sin^2 \frac{\alpha'}{2} \delta z$ où n' est l'indice du milieu de sortie et α' l'angle d'ouverture du faisceau émergent.

Il fait le calcul de $G(v)$ par convolution de A avec A^* et obtient l'expression suivante :

$$G(v) = \frac{4}{\pi a} \cos av \left\{ \beta J_1(a) + \frac{\sin 2\beta}{2} [J_1(a) - J_3(a)] - \frac{\sin 4\beta}{2} [J_3(a) - J_5(a)] + \dots \right\} \\ - \frac{4}{\pi a} \sin av \left\{ \sin \beta [J_0(a) - J_2(a)] - \frac{\sin 3\beta}{2} [J_2(a) - J_4(a)] + \dots \right\}$$

où $a = \frac{8\pi}{\lambda} W_{20} v$ et $\beta = \arccos v$.

Nous avons effectué ce calcul pour diverses valeurs de W_{20} , en remarquant que la série converge assez rapidement. Ces diverses courbes sont représentées figure 43, ainsi que les courbes expérimentales pour les mêmes valeurs de W_{20} . La concordance est bonne pour les petites valeurs de W_{20} et encore acceptable pour les grandes valeurs de W_{20} .

Remarque I.

Des valeurs négatives de $G(v)$ apparaissent pour des défauts de mise au point importants. C'est le phénomène de renversement de contraste.

Remarque II.

Cette étude de la défocalisation permet le réglage du plan de meilleure mise au point : d'autant plus que l'altération de la fonction de transfert est la même pour deux variations de position symétriques de la pupille de part et d'autre de la position idéale.

Remarque III.

Le défaut de mise au point n'altère pas la valeur de la fréquence limite. La fréquence limite est celle au dessus de laquelle la fonction d'autocorrélation de l'amplitude pupillaire est identiquement nulle. Elle ne dépend donc que des dimensions de la pupille.

On voit donc, d'après les exemples ci-dessus, que notre montage permet une détermination avec une bonne précision de la fonction de transfert d'une pupille donnée.

Nous remarquerons cependant que, dans tous les cas étudiés jusqu'à présent, les fonctions $G(v)$ sont purement réelles. La composante imaginaire, théoriquement nulle, est, avec un objectif bien corrigé, assez faible pour être négligée.

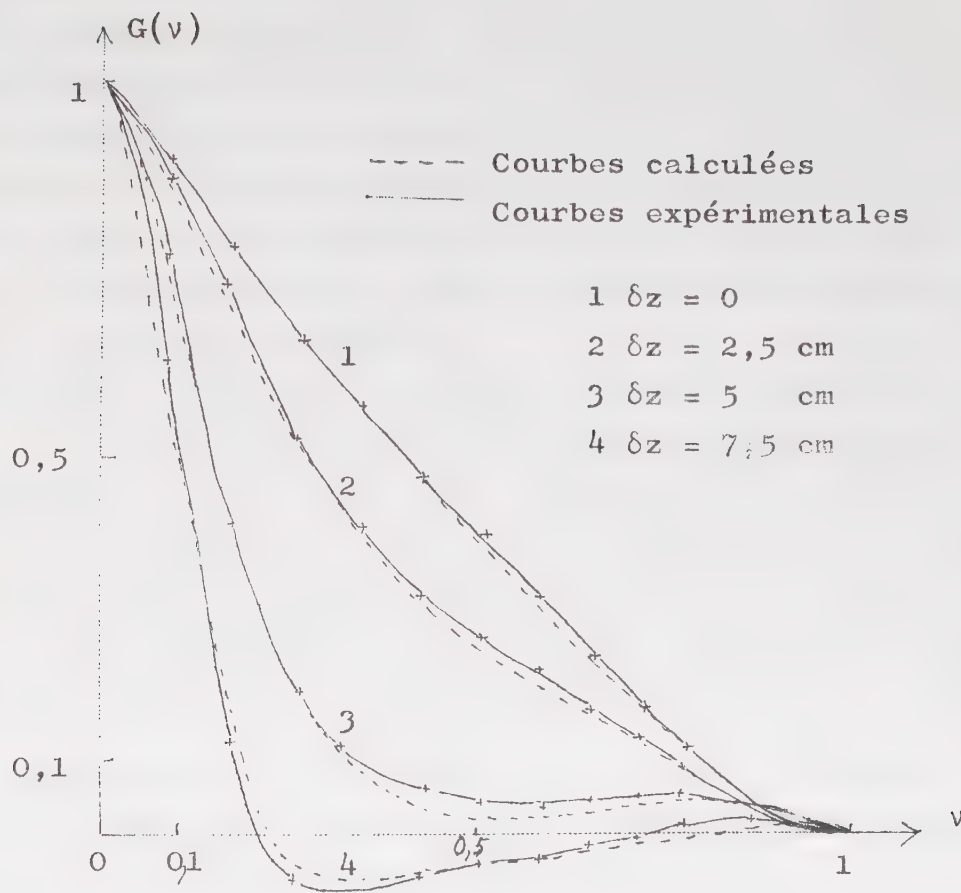


Fig. 43

Courbes représentatives de la fonction de transfert d'une pupille circulaire uniforme en présence d'une défocalisation.

8-8. Problèmes particuliers soulevés par la mesure de la fonction de transfert complexe $G(v)$ des lames métallisées en vue de la détermination du déphasage $\varphi(x)$.

8-8-1. Dispositif.

Les lames rectangulaires utilisées, de dimensions 34×40 mm, sont fixées dans un support spécial s'adaptant sur la monture de l'objectif. Un diaphragme carré mobile, de dimensions 24×24 mm, peut se déplacer devant la lame, dans le sens de sa longueur qui est horizontale. Il est ainsi possible soit de découvrir sur la lame une pupille carrée uniforme de transmission unité, soit de découvrir la pupille carrée métallisée sur une de ses moitiés.

Ce dispositif présente l'avantage de permettre tous les réglages du faisceau lumineux et le centrage correct des divers éléments avec une pupille uniforme ; on a vu que dans ce cas, la fonction de transfert est réelle et paire. L'absence de toute composante imaginaire est donc, ici, un test de bon réglage. On peut ensuite passer, par simple glissement du diaphragme, à la pupille métallisée sans changer quoique ce soit aux réglages et mesurer cette fois les composantes réelles et imaginaires de $G(v)$.

Nous avons vérifié, en utilisant une lame non métallisée, que le déplacement du diaphragme carré devant l'objectif pouvait s'effectuer sans secousse et ne modifiait aucunement la qualité des réglages préalablement effectués. De plus, l'objectif utilisé est très bien corrigé, nous l'utilisons à très faible ouverture, de sorte qu'on obtient la même image quelle que soit la partie qu'on utilise. C'est bien ce qu'ont montré les vérifications préalables.

Dans tous les cas étudiés précédemment (apodiseurs) les fonctions de transfert rencontrées étaient purement réelles. Il n'en est plus de même ici et nous venons de voir l'intérêt qu'il y avait à déterminer la composante imaginaire $h(v)$ de $G(v)$ pour des valeurs petites de φ . Or, malheureusement, la détermination de cette composante imaginaire est beaucoup plus délicate que celle de la composante réelle. On sait en effet que pour obtenir $h(v)$ on doit amener un point de transmission moyenne de la mire ($\Phi = (2k+1) \pi/2$) en coïncidence avec le centre de la figure de diffraction $f(\xi)$. Or, c'est un des points autour duquel la

transmission de la mire varie le plus, de sorte que toute variation de cette position en cours de mesure (à cause des vibrations par exemple) conduit à des résultats aberrants. Pour la composante réelle au contraire, c'est un maximum de transmission de la mire ($\Phi = 2k\pi$) qu'on doit centrer par rapport à la figure de diffraction, et cela n'exige pas un réglage aussi parfait.

8-8-2. Enregistrements.

Toutes les mesures expérimentales des fonctions de transfert $G(v)$ en vue de la détermination de φ , ont été faites en enregistrant le courant de réponse du photomultiplicateur à l'aide du suiveur de spot. Pour relever avec plus de certitude l'ordonnée de chaque point, on enregistre pendant quelques secondes le signal correspondant.

La transmission moyenne a non nulle de la mire introduit un terme constant

$$a \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi . \quad \text{Ce terme constant réduit considéra-}$$

blement la hauteur utile de l'enregistrement donc aussi la sensibilité ; d'où l'intérêt de le réduire sinon de le supprimer complètement.

Nous avons réalisé cette réduction en superposant au courant principal variable avec v un courant continu convenable provenant d'un deuxième photomultiplicateur qui ne reçoit qu'une faible partie du flux lumineux émis par la source. Le montage des deux photomultiplicateurs est effectué en pont à l'aide de deux grosses résistances.

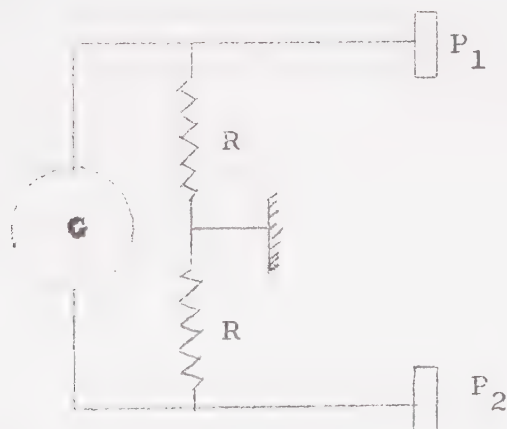


Fig. 44 Schéma du montage.

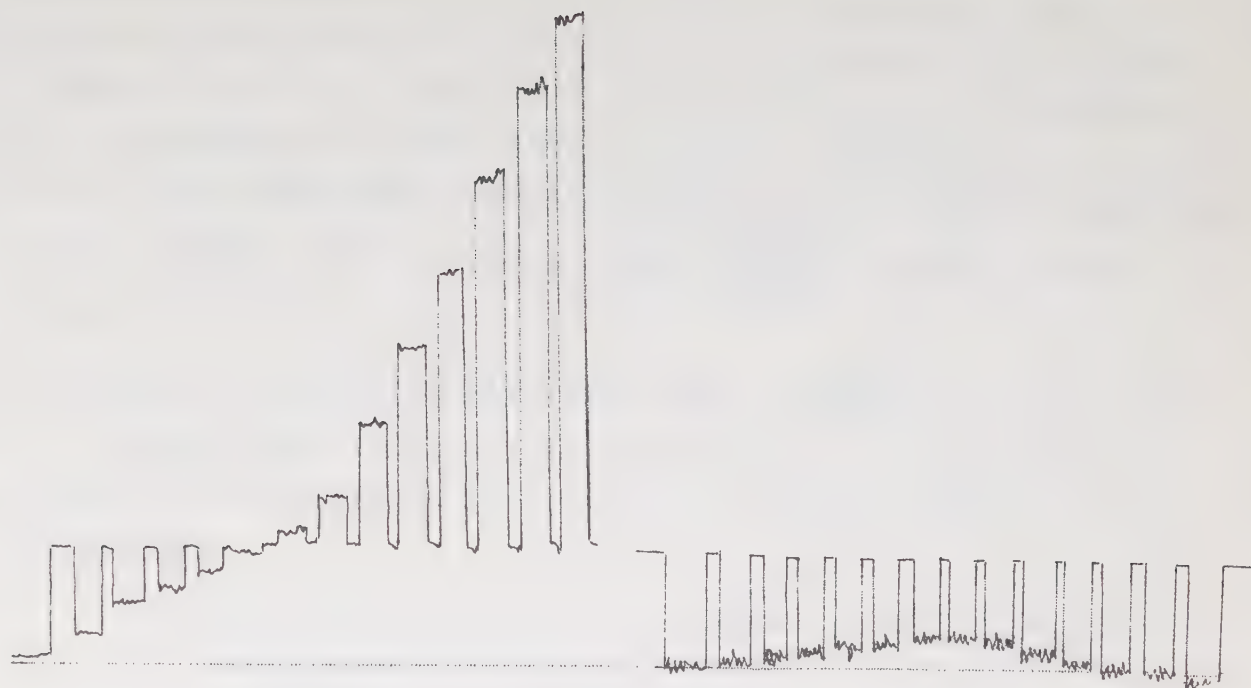


Fig. 45

Exemples d'enregistrements obtenus pour la composante réelle (à gauche) et la composante imaginaire (à droite) de la fonction de transfert.



Fig. 46 Courbes $g(v)$ et $h'(v)$ déduites des enregistrements de la figure 45. En pointillé la composante $h(v)$ corrigée.

La figure 45 reproduit deux enregistrements réalisés ainsi. A partir de ces enregistrements on construit les courbes $g(v)$ et $h(v)$ de la figure 46. Si l'on connaît la transmission T de la couche (que fournit, par exemple, la composante g) on peut calculer φ .

Pour la lame considérée dans cet exemple, $T = 0,319$. La composante réelle $g(v)$ fournit, pour $v = 1/2$, $\cos\varphi = \frac{0,154}{0,1595} = 0,965$; d'où $\varphi \simeq - 17 \text{ gr}$

La composante imaginaire $h(v)$ donne $\sin\varphi = \frac{0,032}{0,1595} = - 0,20$ d'où $\varphi \simeq - 13 \text{ gr}$. En tenant compte de la correction de 4 grades due aux imperfections de réalisation de la mire, on retrouve bien la valeur $\varphi \simeq - 17 \text{ grades}$.

8-8-3. Précision obtenue sur le déphasage $\varphi(x)$ introduit par une couche métallique mince.

Plus précisément, nous nous poserons la question : compte tenu de la précision obtenue sur la fonction de transfert, quelle précision peut-on espérer atteindre sur $\varphi(x)$?

a) Correction des erreurs systématiques.

Nous avons indiqué au paragraphe (8-6-3. 3°), que la seule correction à envisager provenait de la réalisation imparfaite de la mire. Les figures 47a et 47b représentent ces corrections pour l'une de nos lames de chrome ($d = 1,28$ et $\varphi = - 28 \text{ grades}$). Les seules valeurs de $g(v)$ et de $h(v)$ qui nous intéressent ici correspondent à $v = 1/2$. La correction pour cette valeur est nulle pour g . En ce qui concerne h l'expérience fournit une valeur légèrement inexacte $h'(\frac{1}{2})$:

$$h'(\frac{1}{2}) = h(\frac{1}{2}) - 0,061 g(\frac{1}{2})$$

(les autres termes correctifs h_1 , h_2 , g_1 et g_2 sont nuls pour $v = 1/2$).

La valeur exacte de h s'obtient donc à partir des valeurs expérimentales $h'(\frac{1}{2})$ et $g(\frac{1}{2})$. La correction vaut d'être faite, car pour la lame ci-dessus, l'erreur sur φ atteindrait 4 grades.

Remarque. Nous avons vu que lorsqu'on cherche à mesurer $h(v)$, composante imaginaire de $G(v)$, le repérage de la fréquence zéro est délicat ; nous avons proposé pour la déterminer d'utiliser le fait que la réponse du

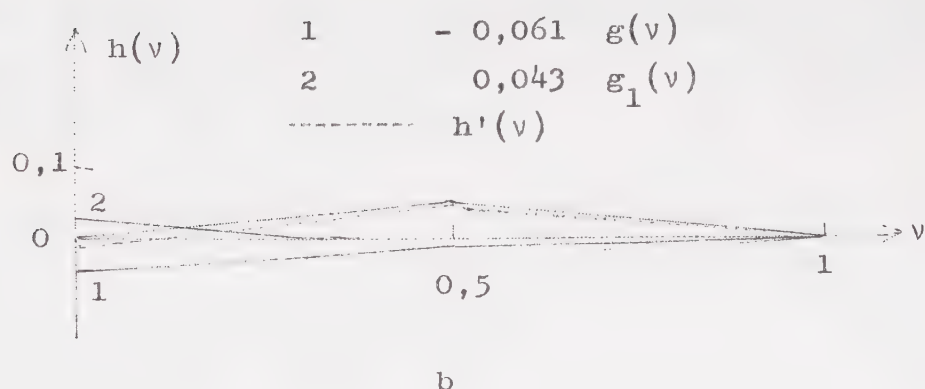
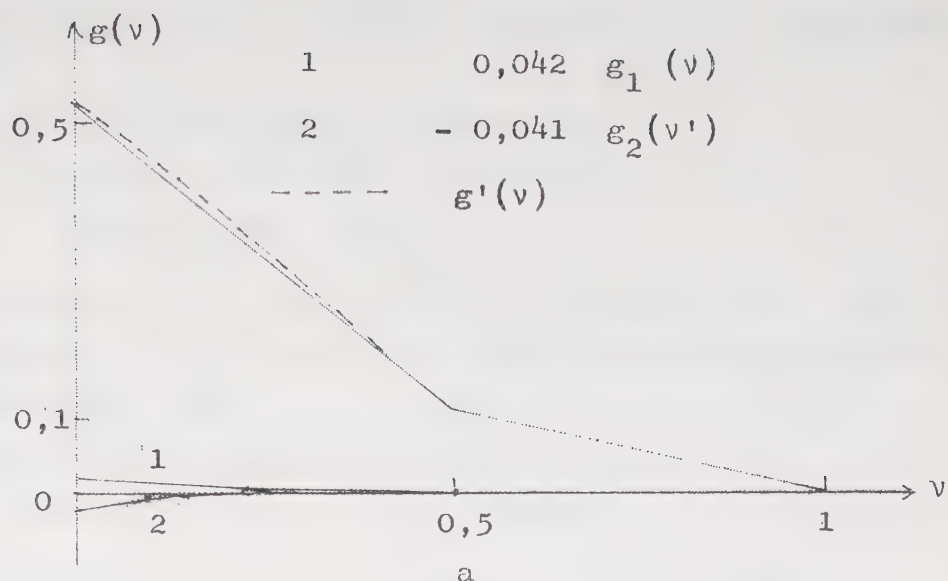


Fig. 47 a et b

Corrections dûes aux imperfections de la mire dans le cas de la fonction de transfert d'une pupille carrée uniforme recouverte sur une de ses moitiés par une couche métallique mince.

a) cas de la composante réelle

b) cas de la composante imaginaire.

En pointillé les courbes obtenues sans tenir compte des corrections.

galvanomètre $R_2(0)$ doit être égale à $R_1(v_1)$. Ceci n'est plus tout à fait exact, si la mire est imparfaite ; en effet, la réponse $R'_2(0)$ est (cf. parag. 8-5-2)

$$R'_2(0) = a f_0 \mp b h'(0) = R_1(v_1) \mp b h'(0).$$

Or, $h'(0)$ n'est pas nul ; sa valeur, dans le cas de notre mire est (cf. fig. 34)

$$h'(0) = h(0) - 0,061 g(0) + 0,043 g_1(0)$$

$$h'(0) = (-0,061 + 0,043) g(0) = -0,018 f_0$$

$$\text{et } b h'(0) = -0,018 [R_1(0) - R_1(v_1)] .$$

Le terme correctif $b h'(0)$ sur $R'_2(0)$ ne vaut donc que les 2/100 de la variation totale de R_1 . Il est de l'ordre de grandeur du bruit, et nous n'en avons pas tenu compte.

b) Influence des erreurs accidentelles.

$\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ sont donnés respectivement par :

$$(1) \quad \cos\varphi = \frac{2}{T} g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(2) \quad \sin\varphi = \frac{2}{T} h\left(\frac{1}{2}\right).$$

Nous avons déterminé T par un microdensitométrage de notre lame et nous avons pu vérifier que la valeur ainsi trouvée concordait avec celle que l'on peut tirer de l'équation

$$\frac{4}{T^2} \left[g^2\left(\frac{1}{2}\right) + h^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] = 1 \quad \text{qui résulte des équations (1) et (2) ci-dessus.}$$

T est connu avec une précision de 2/100,

$g\left(\frac{1}{2}\right)$ avec une précision de 2/100,

et $h\left(\frac{1}{2}\right)$ avec une précision de 6/100.

Il en résulte une erreur sur φ , qui d'après (1) et (2) est donnée par :

$$(\Delta\varphi)_1 = \frac{1}{tg\varphi} \left[\frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta T}{T} \right] \quad \text{si on tire la valeur de } \varphi \text{ de la mesure de } g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{ou } (\Delta\varphi)_2 = tg\varphi \left[\frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta T}{T} \right] \quad \text{si on tire la valeur de } \varphi \text{ de la mesure de } h\left(\frac{1}{2}\right).$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de $(\Delta \varphi)_1$ et $(\Delta \varphi)_2$ pour une série de 8 lames de chrome.

T	0,014	0,077	0,127	0,169	0,205	0,319	0,364	0,457
φ moyen en grades	- 77	- 65	- 50	- 42	- 36	- 25	- 19	- 14
$(\Delta \varphi)_1$	1	1,5	2,5	3,3	4	6	8	11
$(\Delta \varphi)_2$	13	8	5	4	3,2	2,1	1,5	1,1

On vérifie bien que l'incertitude sur φ croît lorsque φ décroît si φ a été mesuré à l'aide de la composante réelle et qu'au contraire, l'incertitude sur φ croît avec φ si la mesure a été effectuée à l'aide de la composante imaginaire. Mais même pour les faibles valeurs de φ les résultats obtenus à partir de la composante imaginaire ne nous paraissent pas aussi sûrs que ceux donnée par la composante réelle, et ceci à cause de l'instabilité plus grande du réglage de la mire en position de transmission moyenne. Nous ne sommes pas encore complètement parvenus à pallier à cet inconvénient.

8-8-4. Signe du déphasage $\varphi(x)$.

Comme nous l'avons dit au paragraphe 7-2-2, φ est déterminé à $2k\pi$ près par la donnée de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$. Nous considérerons le cas $|\varphi| < \pi/2$. La déviation correspondant à $h(v)$ doit changer de sens selon que φ est positif ou négatif. Il convient de déterminer quel est le sens de déviation qu'on doit attendre si, par exemple, φ est positif.

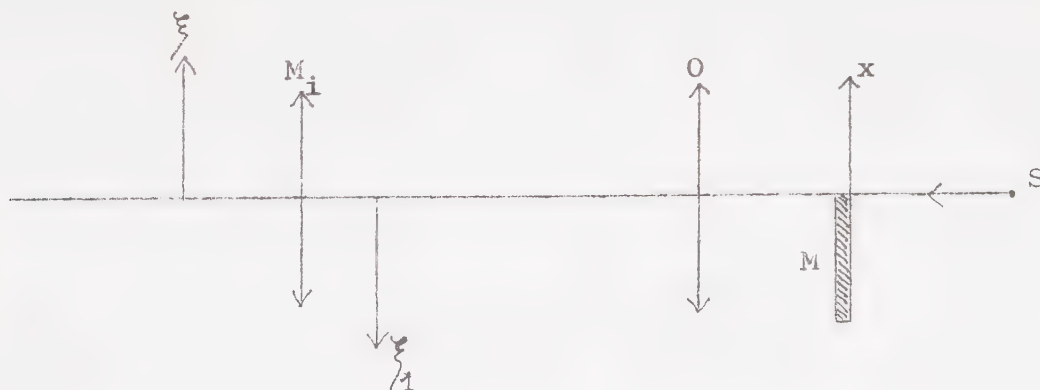


Fig. 48 : Montage. Vue de dessus.

La figure représente le montage vu de dessus. La fente source S est perpendiculaire au plan de la figure. La partie métallisée de la lame est vers la gauche.

L'axe des x positifs est vers la droite ; l'axe des ξ_1 positifs est vers la gauche (figure de diffraction primaire) mais l'axe des ξ positifs est vers la droite (figure de diffraction agrandie par l'objectif de microscope).

Pour obtenir $h(v)$, composante imaginaire de $g(v)$, il faut amener le centre de rotation O de la mire sur un point de transmission moyenne C. Supposons que nous ayons déplacé la mire vers les ξ négatifs (fig.

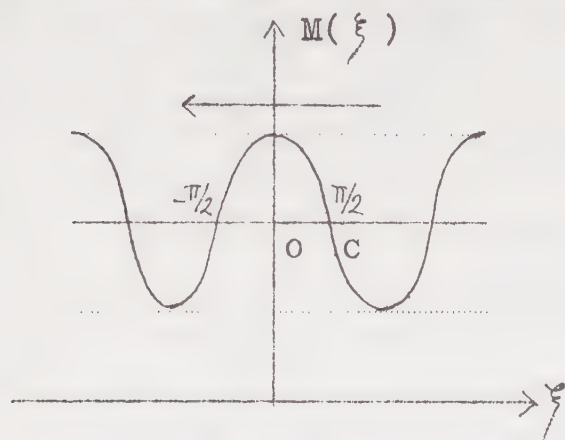


Fig. 49

49). La transmission de la mire qui était $a + b \cos u$ devient $a - b \sin u$. Lorsque, partant de la position $\theta = 0$, on fait tourner la mire, d'un côté ou de l'autre, d'un angle $\theta < \pi/2$, on explore les fréquences positives car :
 $v = v_m \cos \theta$ avec $v_m > 0$, donc $v > 0$.

La réponse du système sera :

$$R(v) = a f_0 - b h(v) = R(0) - b h(v) \text{ (cf. parag. 8-5-2).}$$

Si la déviation $R(v)$ observée pour une valeur positive donnée de v est plus grande que $R(0)$ c'est que $h(v) < 0$, ce qui signifie que $\varphi > 0$ (cf. courbes 26).

Si, par contre, la déviation observée pour v positif est inférieure à $R(0)$, φ est négatif.

8-8-5. Détermination de la variation de φ avec l'épaisseur e des couches.

Nous avons dit que nous désirions connaître la loi $\varphi = f(e)$ à cause de la répercussion que peut avoir le déphasage φ sur la qualité d'un apodiseur.

Nous avons déterminé l'épaisseur des couches par la méthode

des franges d'égale épaisseur de TOLANSKI. D'une manière générale, nous avons fabriqué, sous très bon vide, la pression résiduelle étant de l'ordre de $1,5 \cdot 10^{-6}$ mm de mercure, simultanément 8 couches d'épaisseurs différentes. Nous donnons ci-dessous un tableau indiquant pour chacun des métaux étudiés les épaisseurs limites déposées et les densités optiques correspondantes $d = \log T^2$).

	e en m μ		d	
Cr	16	- 88	0,67	- 2,66
Ge	16,5	- 81,6	0,79	- 1,73
Ag	17,5	- 98	0,50	- 2,84
Au	26	-139	0,51	- 2,81

8-8-6. Test de la méthode.

La variation de phase φ que la traversée d'une couche métallique mince, d'épaisseur e , impose à un faisceau de lumière monochromatique en incidence normale, constitue une donnée utile pour la détermination de l'indice complexe de la couche.

Madame CASSET [21] a montré que la courbe $\varphi = f(e)$ était une droite pour des épaisseurs e assez grandes pour que l'effet des réflexions multiples à l'intérieur de la lame soit négligeable et que, dans ces conditions, la pente de la droite et son ordonnée à l'origine permettaient de calculer l'indice de réfraction n et l'indice d'extinction $\mathcal{K}$.

Nous avons décidé d'utiliser cette remarque pour tester notre méthode en l'appliquant à des métaux dont les constantes optiques figurent dans la littérature tels l'or, l'argent et le germanium.

Pour chacun de ces métaux nous avons mesuré les fonctions de transfert d'une série de lames et nous avons établi les courbes $\varphi = f(e)$.

Germanium : les valeurs de φ , négatives, deviennent rapidement très grandes. Pour $e = 50$ m μ , φ vaut environ - 100 grades (fig. 50).

Argent : le déphasage φ est positif. La courbe est représentée sur la fig. 51.

Or : les valeurs de φ , positives, sont relativement grandes (fig. 52) ; pour $e = 100$ m μ , φ vaut 90 grades.

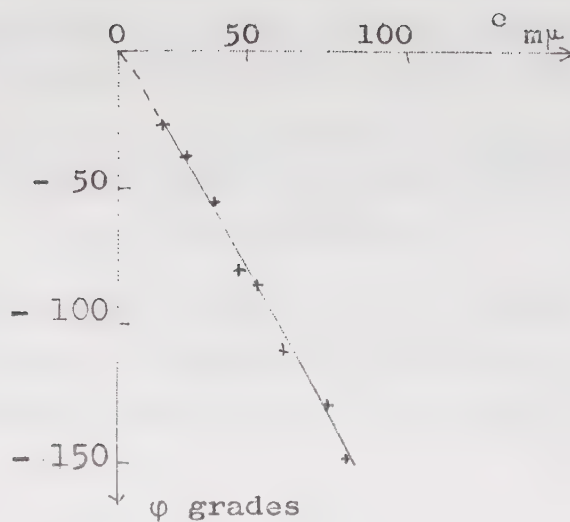


Fig. 50 : Courbe $\varphi = f(e)$ dans le cas du germanium.

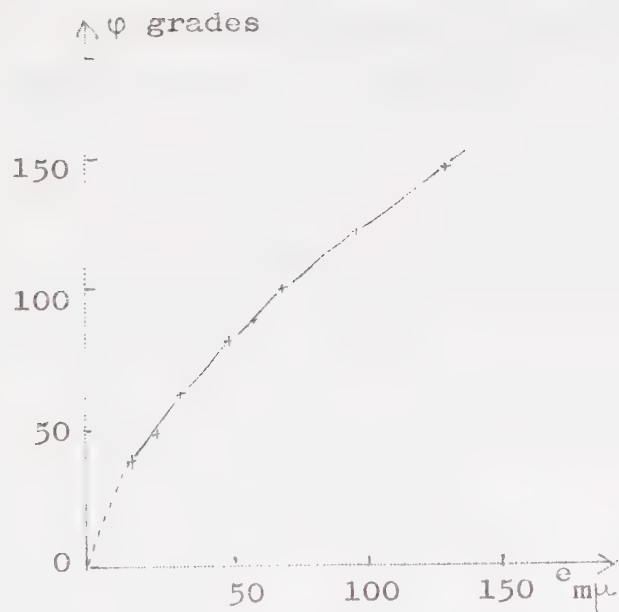


Fig. 51

$\varphi = f(e)$
cas de l'argent

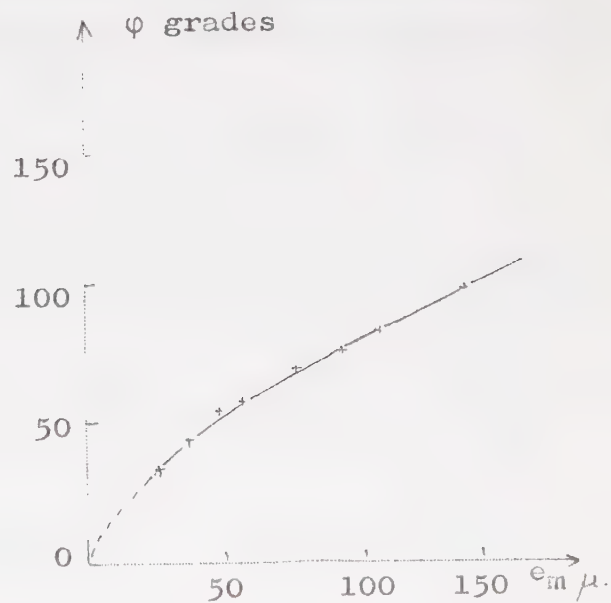


Fig. 52

$\varphi = f(e)$
cas de l'or

Déduction des constantes optiques à partir des courbes $\varphi = f(e)$.

Dans le cas d'une lame métallique mince déposée sur un support de verre homogène transparent, le facteur de transmission de la lame, indépendant du sens de propagation de la lumière à travers la lame, est :

$$T = A_t \exp i\varphi = \frac{(1+r_1)(1+r_2) \exp \frac{j2\pi e}{\lambda} \cdot \exp \frac{j2\pi n_1 e}{\lambda}}{r_1 r_2 + \exp \frac{2j2\pi n_1 e}{\lambda}}$$

où r_1 et r_2 représentent les facteurs de FRESNEL aux inter-surfaces air-lame et lame-verre, e l'épaisseur de la lame, $n_0=1$ l'indice de l'air, $n_1 = n - j\mathcal{X}$ l'indice complexe de la lame et n_2 l'indice du verre très peu différent de 1,52.

La transmission peut encore s'écrire :

$$T = (1+r_1)(1+r_2) \frac{\exp - \frac{2\pi \mathcal{X} e}{\lambda} \cdot \exp \frac{j2\pi n e}{\lambda} \left(\frac{1}{n} - 1\right)}{1 + r_1 r_2 \cdot \exp - \frac{j4\pi n e}{\lambda} \exp - \frac{j4\pi \mathcal{X} e}{\lambda}}$$

Dans le cas où l'épaisseur de la lame est assez grande pour que les réflexions multiples à l'intérieur de la lame soient négligeables, l'expression de T se simplifie et s'écrit :

$$T = A_t \exp i\varphi = (1+r_1) \cdot (1+r_2) \cdot \exp - \frac{2\pi \mathcal{X} e}{\lambda} \cdot \exp \frac{j2\pi n e}{\lambda} \left(\frac{1}{n} - 1\right).$$

La variation de phase φ est l'argument de cette quantité et s'écrit : $\varphi = \frac{2\pi e}{\lambda} (1 - n) + \varphi_0$ où φ_0 , qui représente l'argument de $(1+r_1)(1+r_2)$ est la variation de phase aux intersurfaces.

$\varphi = f(e)$ est une droite dans le cas d'épaisseurs assez grandes. Dans le cas des lames minces, la courbe $\varphi = f(e)$ obtenue doit donc tendre vers une asymptote.

La pente de cette asymptote est : $\frac{2\pi(1-n)}{\lambda}$: elle nous donne la valeur de n .

L'ordonnée à l'origine φ_0 de l'asymptote est liée aux indices n et $\mathcal{X}$ par la relation :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\mathcal{X}(n^2 + \mathcal{X}^2 - n_2)}{(n^2 + \mathcal{X}^2)(n + 1 + n_2) + nn_2}.$$

Elle nous donne donc la valeur de $\mathcal{L}$. Remarquons que si l'on fait $n_2=1$, on retrouve bien la l'expression de φ_0 donnée par Madame CASSET dans le cas des lames sans support.

Cette méthode de détermination de l'indice complexe d'un métal n'est utilisable que si les épaisseurs des lames étudiées sont suffisantes pour que $\varphi = f(e)$ atteigne son asymptote.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs des indices n et $\mathcal{L}$ calculées d'après les courbes expérimentales $\varphi = f(e)$, pour la longueur d'onde $0,546 \mu$. Les valeurs trouvées ne diffèrent pas sensiblement des valeurs généralement admises. Le tableau donne aussi les valeurs pour le chrome qui fait l'objet d'une étude spéciale au paragraphe 8-8-6.

	$n_{\text{mes.}}$	$n_{\text{tab.}}$	$\mathcal{L}_{\text{mes.}}$	$\mathcal{L}_{\text{tab.}}$	Références
Ge	3,53	3,47	1,13	1,40	[22]
Ag	0,05	0,055	3,26	3,22	[23]
Au	0,33	0,36	2,24	2,32	[24], [21]
Cr	2,42	2,48	2,16	2,30	[25]

Remarque : $\varphi = f(e)$ pourrait être utilisé pour étudier la structure et le comportement des couches très minces.

Nous pouvons avoir confiance en notre méthode. Pour nous l'intérêt réside dans la connaissance du déphasage pour le chrome, métal convenant bien à la fabrication d'apodiseurs [4].

8-8-7. Cas du chrome.

Deux séries de 8 couches de chrome ont été fabriquées. La figure 53 montre que les points représentatifs de $\varphi = f(e)$ pour ces deux séries se recoupent bien. Pratiquement une seule courbe englobe tous les points. Nous obtenons donc une très bonne reproductibilité de nos couches.

La courbe $\varphi = f(e)$ tend vers une asymptote et pour une épaisseur de $100 m\mu$ la phase φ dépasse 90 grades.

Fig. 53

Courbe $\varphi = f(e)$
dans le cas du chrome

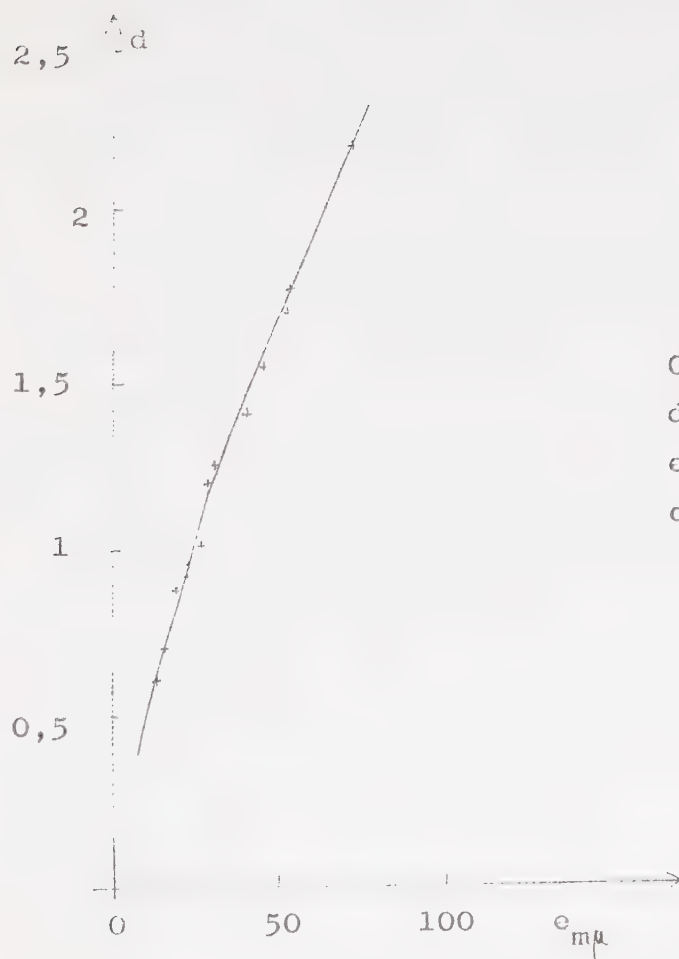
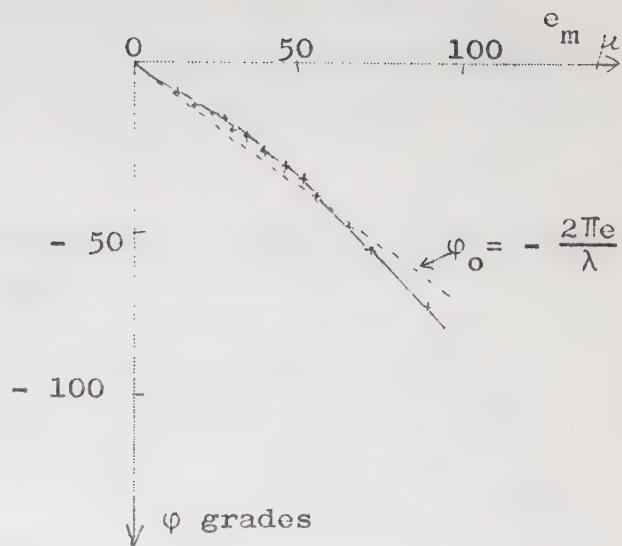


Fig. 54

Courbe représentant la variation
de la densité optique du chrome
en fonction de l'épaisseur de la
couche.

La courbe $\psi_T = \varphi - \frac{2\pi e}{\lambda}$ se déduit de $\varphi = f(e)$.

La figure 54 représente la densité optique des couches en fonction de l'épaisseur de la couche. Pour les densités qui dépassent 1, en première approximation, on peut admettre que la variation de d est linéaire : $e_{m\mu} = 40 d$.

8-9. Influence sur la qualité des apodiseurs du terme de phase introduit par la métallisation du support.

Les verres que nous avons employés comme support sont plans à $\lambda/10$ près ce qui correspond pour le faisceau qui les traverse à des retards ou des avances locales pouvant atteindre 40 grades. D'après la figure 53, le dépôt de chrome qui les recouvre ne produit des déphasages φ de cet ordre que pour des épaisseurs supérieures à 45 $m\mu$ environ, c'est à dire, ici, pour des densités optiques supérieures à 1,5. Or, il n'est pas rare que la densité optique d'un apodiseur atteigne, sur les bords par exemple, la valeur 2 ou même 3 ; ce qui correspond, pour des dépôts de chrome, à des phases φ de -55 et -90 grades.

Comme nous l'avons déjà dit, on doit donc s'attendre à obtenir une figure de diffraction un peu différente de celle qu'aurait produite la répartition $T(x)$ entièrement réelle qu'on s'était proposé de réaliser.

Pour déterminer dans quelle mesure cet effet peut être gênant, nous avons calculé la répercussion du terme φ sur la figure de diffraction, en négligeant les termes $\Delta \varphi$ aléatoires dûs à la lame ; ceci n'aurait de sens en toute rigueur que pour des lames à $\lambda/20$ ou même mieux mais nous donnera tout de même un ordre de grandeur des effets imputables à la métallisation. La fonction apodisante $T(x)$ que nous avons choisie pour exemple est très médiocre, son unique mérite étant de représenter au moins grossièrement un type courant d'apodiseurs tout en conduisant à des calculs particulièrement simples. Cette fonction est $T(x) = \exp-5 |x|$ dont la figure de diffraction est représentée fig. 55 . L'apodiseur correspondant pourrait être constitué par deux coins accolés de telle sorte que sa densité optique d varie en forme de V.

L'épaisseur $e(x)$ du dépôt métallique qui permet d'obtenir cette loi d'opacité est, en première approximation, proportionnelle à $|x|$.

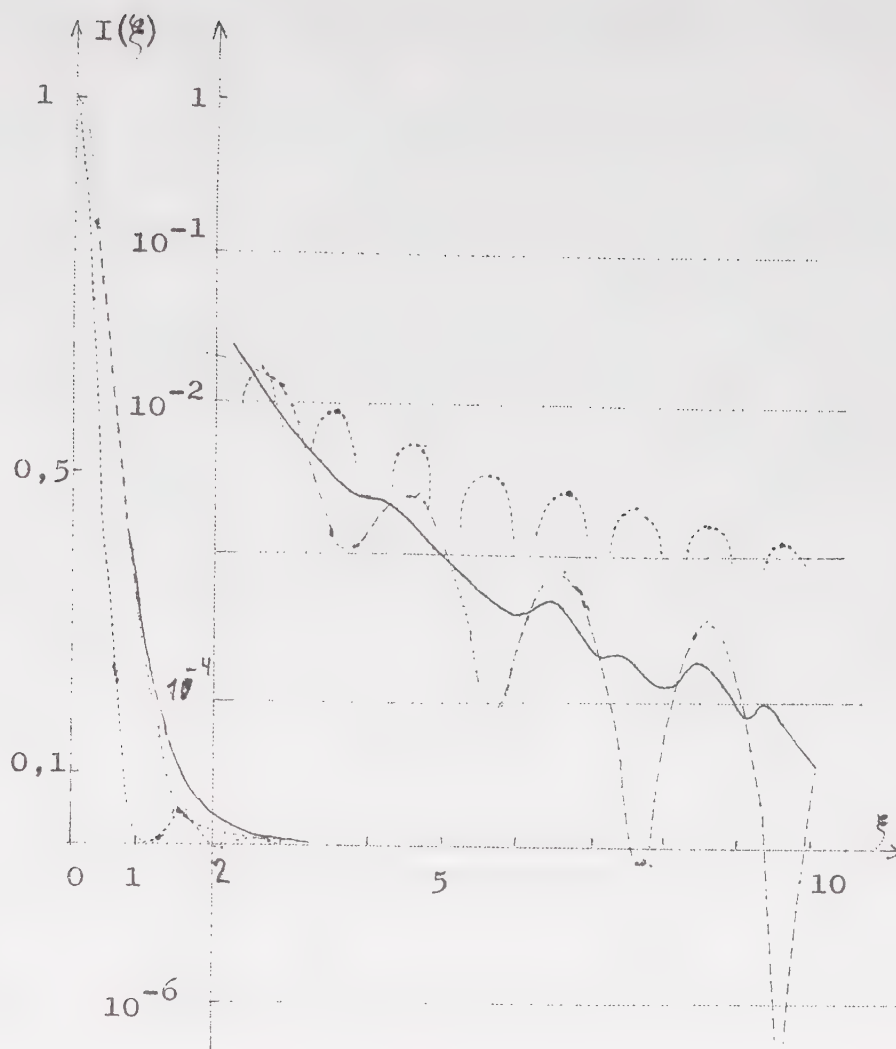


Fig. 55

Figures de diffraction

----- de l'apodiseur $T(x) = \exp - 5|x|$

———— de l'apodiseur altérée $T'(x) = \exp - |5|x| \exp[-j\pi,0,32|x|]$

..... d'un objectif de contour carré et de transparence uniforme.

Et il en sera de même pour φ si nous admettons que $\varphi \neq -2\pi e(x)/\lambda$. Nous obtenons ainsi, dans le cas de l'apodiseur précédent, la répartition suivante des phases : $\varphi = -2\pi \cdot 0,32 |x|$. Compte tenu de ce terme l'amplitude diffractée devient :

$$\mathcal{A}(\xi) = \mathcal{H}(\xi - 0,32) + \mathcal{H}(-\xi - 0,32)$$

avec

$$\mathcal{H}(\xi) = \int_0^{1/2} \exp(-5x) \exp 2\pi j x \xi \, dx.$$

Ces équations montrent que la fonction $\mathcal{A}(\xi)$ ne diffère guère de l'expression $\mathcal{H}(\xi) + \mathcal{H}(-\xi)$ qui la représenterait si φ était nul, excepté au voisinage du centre (jusqu'à ξ de l'ordre de 0,3). Des calculs complets confirment bien cette précision : l'intensité diffractée au centre dans la figure altérée se trouve abaissée dans le rapport 1,17, la frange centrale est légèrement élargie à sa base, mais le niveau relatif des franges latérales, à partir de la deuxième, est pratiquement inchangé. La figure 55 qui représente la fonction $I(\xi)$ montre même un effet inattendu qui est un léger abaissement relatif des maxima secondaires (accompagnant, comme on s'en doute, un relèvement des minima dont les creux se trouvent presque complètement comblés). Il y a donc, pourvu que l'objet se réduise à une ligne très fine, un très léger effet d'apodisation dû à φ , qui disparaît bien entendu ou même se transforme en l'effet inverse pour un objet plus large. Cette légère pseudo-apodisation ne constitue d'ailleurs qu'un détail curieux à signaler ici, mais qui, malheureusement est lié à cette fonction particulière et ne se rencontrera sans doute pas fréquemment.

Le résultat général de cette discussion est le suivant : en ce qui concerne l'apodisation proprement dite, l'effet du terme de phase est petit, excepté sur la frange centrale et la première frange secondaire. Il vaut donc la peine de réaliser des apodiseurs par dépôt d'un métal sur un support transparent. C'est d'ailleurs bien ce que les apodiseurs fabriqués ont toujours montré, mais il faut s'attendre à obtenir moins de lumière au centre de la figure de diffraction que l'absorption du métal, considérée seule, ne le fait prévoir, et un maximum central un peu élargi. D'où la nécessité accrue lorsqu'il s'agit de choisir la fonction $T(x)$ à réaliser de ne pas tenir compte uniquement de l'apodisation qu'elle est capable de donner mais aussi de ses performances dans la région centrale de la figure de diffraction.

9. REALISATION EFFECTIVE D'UN APODISEUR.

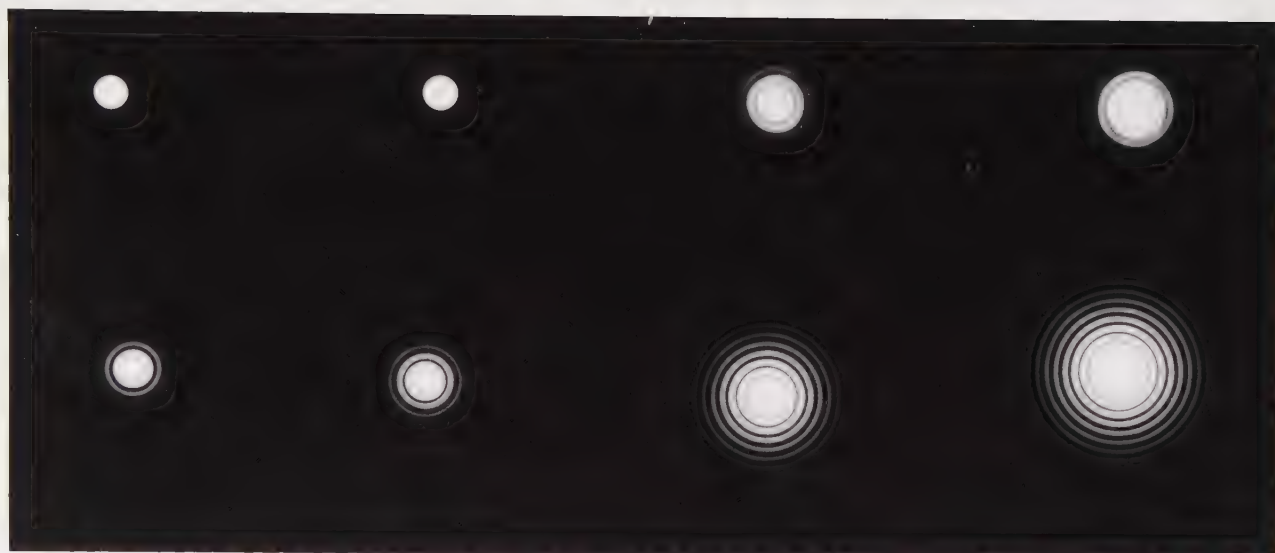
En vue de vérifier ce résultat, nous avons participé à la réalisation effective d'un apodiseur au laboratoire [3]. Il s'agit de l'écran $T(r)$ dont nous avons déjà donné les caractéristiques au paragraphe 5-3-2.

Nous avons contrôlé expérimentalement les performances de cet apodiseur en photographiant la figure de diffraction de l'objectif de COUDER garni de cet écran et celle du même objectif sans écran (cf. fig. 56).

Toutes les photographies avec écran ont été faites avec un temps de pose t_1 , celles sans écran avec un temps de pose t_2 et le rapport t_1/t_2 tient compte de l'absorption relative de l'apodiseur. Les surexpositions ont été obtenues en supprimant successivement des verres absorbants qui affaiblissaient initialement la source. Elles sont respectivement de 500, 1000, 5000 et 10000 en a, b, c et d.

En b, pour l'objectif sans écran, le deuxième anneau possède une intensité relative de l'ordre de 5.10^{-3} . En comparant ces résultats à la courbe calculée (fig. 16a) on constate que l'apodisation est, à une très bonne approximation, celle que l'on attendait.

L'apodiseur réalisé est donc efficace malgré le terme de phase.



a

b

c

d

Fig. 56

Photographie de la figure de diffraction de l'objectif garni de l'apodiseur (en haut) et sans écran (en bas).

Sur la rangée inférieure en b, le deuxième anneau possède une intensité relative de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3}$; on comparera ces résultats avec les courbes de la figure 16 a.

10. PROBLEME DU VIEILLISSEMENT D'UN APODISEUR.

Nous venons de voir qu'un apodiseur correctement réalisé répondait aux espoirs mis en lui et procurait effectivement une bonne apodisation. Mais on peut se demander si ces propriétés se conservent dans le temps et si le vieillissement de l'apodiseur n'altère pas ses qualités.

Nous avons à notre disposition une réalisation effective de l'apodiseur $T(r)$ décrit au paragraphe 5-3-2, faite il y a 6 ans par dépôt sous vide de chrome sur verre et nous avons voulu déterminer expérimentalement si cet écran était encore utilisable.

Cet écran a son maximum d'efficacité quand la pupille qu'il garnit n'est pas obturée. Mais nous avons vu que sa fonction de transmission des amplitudes lumineuses (cf. fig. 16 b) passe par un minimum au centre de l'écran. Cette circonstance permet à cet apodiseur de ne pas perdre toutes ses qualités lorsqu'on y pratique une obturation centrale, c'est à dire lorsqu'on remplace la partie centrale sombre par un cache parfaitement opaque. Nous avons donc là, en un même écran, deux apodiseurs distincts : un apodiseur de haute qualité pour pupille circulaire et un apodiseur de moindre qualité pour pupille annulaire. Nous allons les tester tous les deux.

10-1. La transmission de l'apodiseur.

La figure 57 présente les densités optiques de l'apodiseur mesurées au microdensitomètre juste après sa fabrication et 6 ans après. On voit que l'apodiseur s'est éclairci sur les bords. Cette transparence sur les bords pourrait être due à une oxydation superficielle.

10-2. Etude des figures de diffraction.

Cette étude a été faite par une méthode de photométrage photographique, dont on a voulu qu'elle fut applicable à n'importe quelle figure de diffraction à symétrie circulaire, de très faible dimension. Cette méthode convient ici car elle détermine les niveaux des sommets pour les anneaux de diffraction successifs. Par contre elle ne peut guère servir à une détermination complète du profil des figures de diffraction.

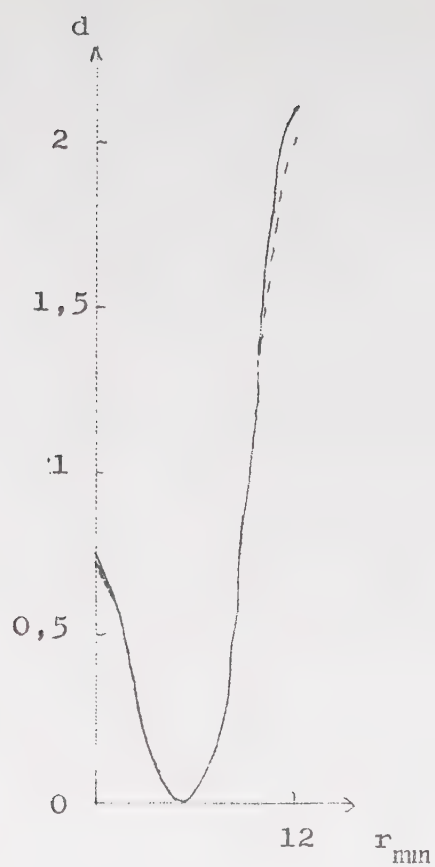


Fig. 57

Courbes représentatives de la densité optique de l'apodiseur $T'(r)$

——— juste après sa fabrication

----- 6 ans après.

10-2-1. Les profils calculés.

1°) en l'absence de toute obturation, le profil de la figure de diffraction est donné par la figure 58a. Cette figure est tout à fait classique : les anneaux sont réguliers et de largeur normale.

2°) en présence d'un disque obturateur, le calcul prévoit pour cet apodiseur des anneaux très larges dont les sommets ont des formes ondulées pouvant présenter plusieurs maxima et minima. Le pouvoir apodisant diminue beaucoup. La figure 58 b présente le profil obtenu pour le taux d'obturation $t = 0,3$.

10-2-2. Le procédé de photométrage photographique.

Il a déjà été utilisé par Madame ROIZEN [26] mais dans le cas un peu différent, du point de vue expérimental, de figures de diffraction rectilinéaires. Nous mesurons sur la plaque impressionnée à quelle distance du centre de la figure de diffraction le noircissement cesse d'être perceptible. Une première photographie est faite avec un réducteur d'intensité de transmission I/K et avec un temps de pose tel que le centre de la figure soit juste perceptible. On fait ensuite, sans réducteur d'intensité et avec le même temps de pose, une autre photographie, sur la même plaque : les points justes perceptibles sont alors ceux où l'intensité est réduite dans le rapport K par rapport au centre.

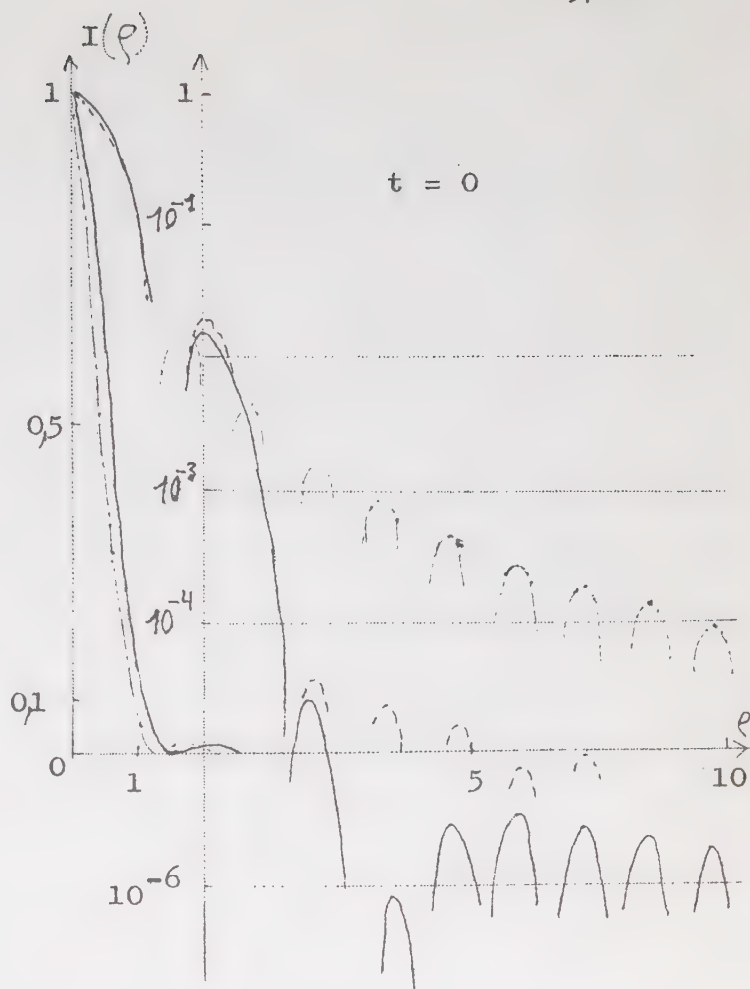
Pratiquement, la difficulté suivante qui n'existe pas dans le cas d'apodiseurs rectilinéaires, se présente quand on compare la trace du centre de la figure de diffraction juste perceptible obtenue avec le réducteur et le dernier anneau juste perceptible obtenu sans réducteur : le disque central juste perceptible correspond à une intensité plus forte que l'anneau juste perceptible. En effet, l'anneau peut être considéré comme une succession de points juxtaposés en cercle et cette figure est perceptible alors même qu'un des points isolé qui la constitue ne le serait pas. Une correction du temps de pose est donc nécessaire. Cette correction doit être déterminée expérimentalement et dans notre cas, l'expérience a montré qu'il convenait d'adopter pour les anneaux un temps de pose égal à la moitié du temps pour lequel le centre demeure visible avec réducteur. Nous avons contrôlé cette méthode de photométrage sur la figure de diffraction connue de la pupille uniforme (fig. 59).

Fig. 58 a et b

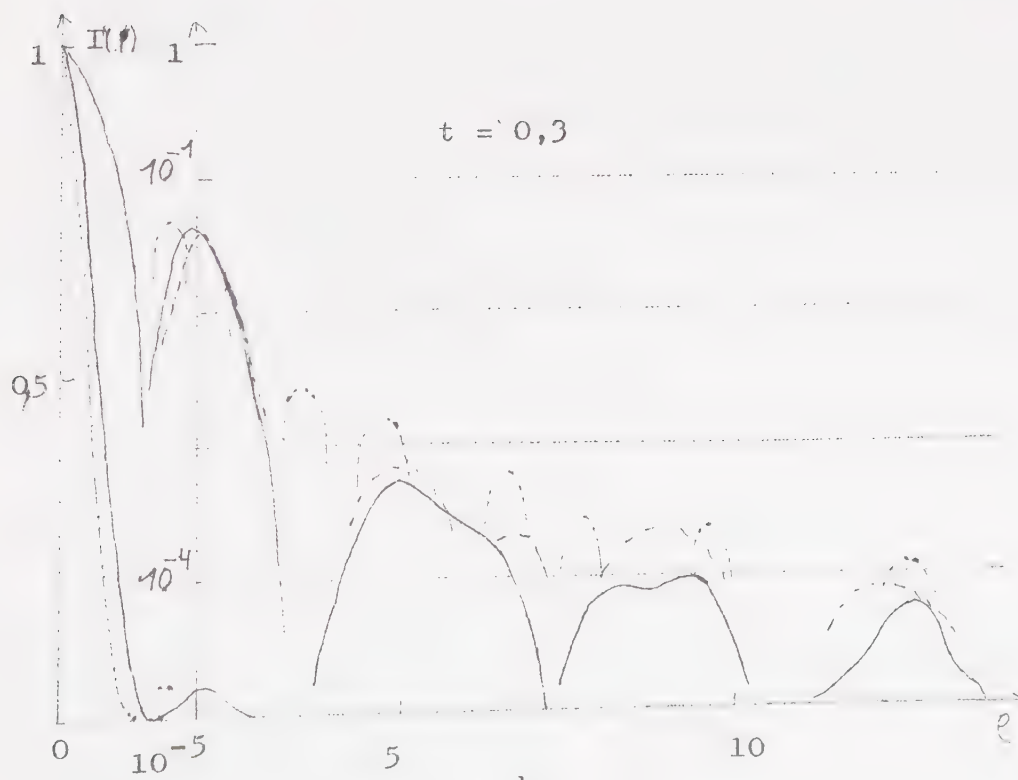
Figures de diffraction de
l'objectif garni de l'apo-
diseur $T'(r)$

- a) sans obturation centrale
- b) avec obturation centrale
taux 0,3

— courbes calculées
--- courbes expérimentales



a



b

Fig. 59

Figure de diffraction
de l'objectif circulaire
uniforme

— courbe calculée
---- courbe expérimentale

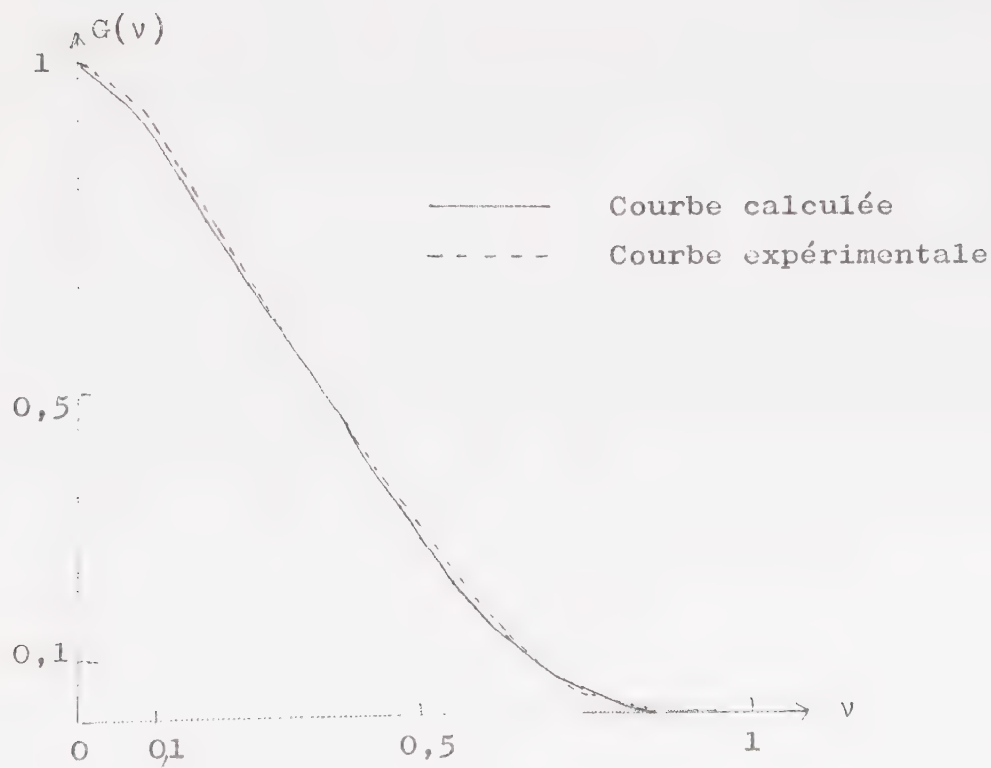
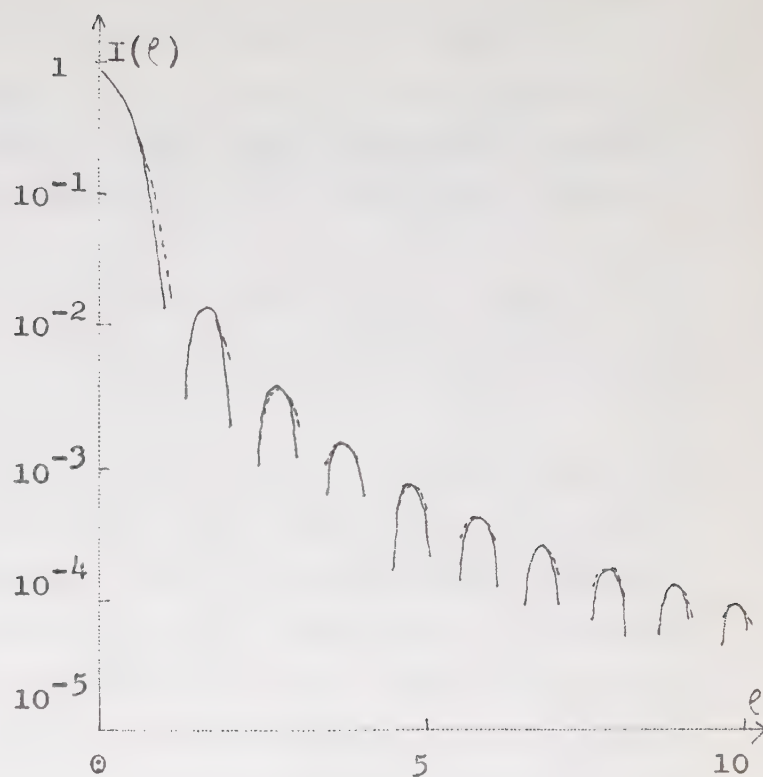


Fig. 60 : Courbes représentatives de la fonction de transfert
de l'objectif garni de l'apodiseur $T'(r)$ (sans obturation
centrale).

10-2-3. Application du procédé à l'apodiseur considéré.

1°) en absence d'obturation, on voit sur la fig. 58a que l'apodisation est importante quoique moins bonne que prévue. Le facteur de réduction des intensités varie de 40 à 15 entre les abscisses 3 et 13.

2°) en présence d'une obturation au taux 0,3, la figure 58 b montre que l'apodisation est aussi moins bonne que prévue. mais qu'elle est tout de même intéressante. Le facteur de réduction des intensités est environ 2,5 entre les abscisses 3 et 7.

L'apodisation est donc appréciable surtout pour les anneaux proches du centre qui sont justement les plus gênantes. Le pouvoir apodisant réel, inférieur à celui que nous attendions théoriquement, peut s'expliquer par le vieillissement de cet apodiseur. On remarque en effet sur la figure 57 que l'apodiseur est trop clair sur les bords. C'est là d'ailleurs que se présentent les plus grands écarts de densité ; leur sens explique parfaitement l'inefficacité relative de notre apodiseur dans les parties lointaines de la figure de diffraction. Mais on voit que cet effet de vieillissement n'a pas rendu l'écran inutilisable.

10-3. Influence du vieillissement sur la fonction de transfert.

Nous avons mesuré la fonction de transfert de cet apodiseur utilisé sans obturation centrale.

Sur la figure 60 sont représentées la courbe calculée (cf. paragraphe 5-3-3) et la courbe expérimentale obtenue grâce à notre montage. On voit que l'accord de ces deux courbes est excellent sauf pour les fréquences moyennes où nous remarquons un léger écart.

Conclusion. Il n'est donc pas vain d'essayer de réaliser des apodiseurs métallisés puisque ni le terme de phase, ni le vieillissement n'ont des effets désastreux.

II - LES PUPILLES ANNULAIRES

Puisque dans le cas des pupilles circulaires l'apodisation *a priori*, effectuée à l'aide d'écrans pupillaires de transmission non uniforme, donne de bons résultats il est naturel d'essayer d'appliquer cette méthode au cas des pupilles annulaires.

1 - CORRECTION A PRIORI DANS LE CAS DES PUPILLES ANNULAIRES.

1-1. Les travaux antérieurs : apodisation sur un intervalle infini.

Des solutions avaient déjà été ébauchées [27]. Mais d'une façon générale, les résultats sont mauvais lorsque l'on désire apodiser de ρ_m à l'infini, ρ_m étant le plus près possible du centre.

1-2. Apodisation sur un intervalle limité.

Nous avons essayé d'obtenir de meilleurs résultats en consentant à n'apodiser qu'un peu plus loin du centre et en restreignant l'intervalle sur lequel nous exigeons l'apodisation. Nous acceptons qu'au delà de cet intervalle le niveau des pieds remonte, en espérant que tout au moins l'intervalle choisi sera bien apodisé.

1-2-1. Calcul d'écrans apodiseurs pour des pupilles circulaires présentant une obturation centrale.

Dans le cadre de la famille de fonctions en $J_0(2\lambda_p r)$ nous avons, en utilisant le critère du minimum du facteur d'étalement, calculé les meilleurs écrans apodiseurs à n termes, pour différents taux d'obturation et différents intervalles d'apodisation.

Rappelons que le facteur d'étalement [1] est défini par :

$$L(\rho_m, \rho_M) = \frac{\int_{\rho_m}^{\rho_M} I(\rho) 2\pi \rho d\rho}{I(0)} . \text{ C'est le rapport de l'énergie des}$$

pieds de la figure de diffraction entre les rayons ρ_m et ρ_M à l'intensité au centre de la figure.

a) les taux d'obturation.

Nous avons conduit le calcul pour les trois taux de 0,1, 0,2 et 0,3. La figure 61 présente les figures de diffraction des pupilles circulaires uniformes obturées à ces taux. On remarque que le niveau des pieds augmente beaucoup avec l'obturation, d'où l'intérêt d'apodiser ces pupilles.

b) Les intervalles d'apodisation.

Nous avons utilisé deux intervalles d'apodisation répondant à des préoccupations différentes.

Le premier est compris entre les rayons $\rho = \frac{\lambda_3}{\pi}$ et $\frac{\lambda_{13}}{\pi}$, c'est à dire entre le 3^e et le 13^e zéro de la figure normale (λ_3 et λ_{13} représentent respectivement la 3^e et la 13^e racine de $J_1(\pi\rho) = 0$). L'apodisation n'est donc pas recherchée très près du centre de la figure de diffraction (puisque ρ est compris entre 3,24 et 13,25) et on peut espérer qu'elle se fera dans de bonnes conditions pour les trois taux d'obturation.

Le deuxième intervalle choisi a son origine beaucoup plus près du centre de la figure de diffraction puisque $\pi\rho$ est compris entre 4 et 20, ce qui correspond à $1,27 \leq \rho \leq 6,37$. L'apodisation est donc plus ardue et, comme nous allons le voir plus loin, les résultats sont moins favorables. Nous nous sommes d'ailleurs limités au taux 0,2.

c) les facteurs de qualité des apodiseurs.

Le facteur de qualité de la figure de diffraction est la quantité :

$Q = \frac{1}{L(\rho_m, \rho_M)}$. Ce facteur est d'autant plus grand que l'apodiseur est plus efficace et il fournit un élément de jugement global sur la valeur de l'apodiseur.

Les tableaux qui suivent donnent les facteurs de qualité des apodiseurs calculés,

$$T_n = \sum_{p=0}^{n-1} a_p J_0(2\lambda_p r)$$

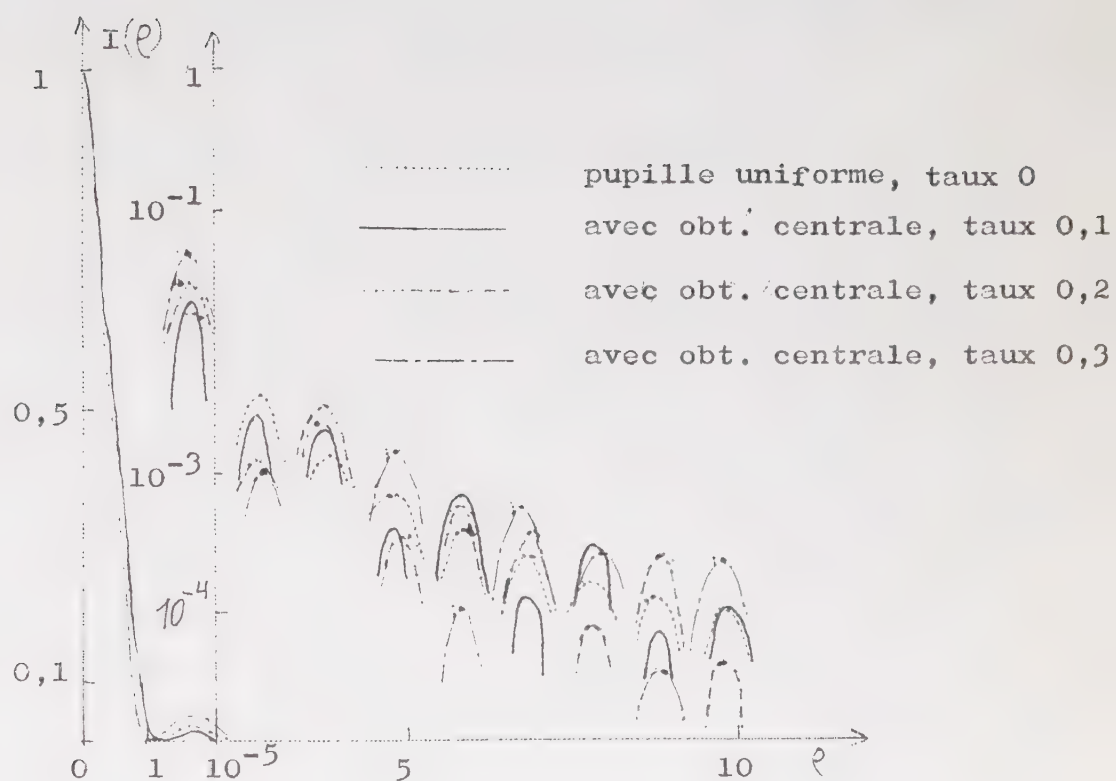


Fig. 61

Figures de diffraction de la pupille circulaire uniforme.

1°) Intervalle d'apodisation $\lambda_3 \leq \pi p \leq \lambda_{13}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t = 0,1	134,8	172,6	13752	24060	27412	32026	32742		
t = 0,2	98,29	98,35	5456	5456	5456	6380	6626		
t = 0,3	97,5	99,0	485	701	701	740	767	800	818

L'écran à un terme représente la pupille uniforme.

2°) Intervalle d'apodisation $4 \leq \pi p \leq 20$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t = 0,2	15,6	29,8	32,7	33,9	37,8	38,7	206,3	206,9	207

Comme on s'y attend, les facteurs de qualité sont croissants ou, stationnaires avec le nombre de termes n des écrans. On remarque que, par exemple, pour les écrans $\lambda_3 - \lambda_{13}$ à 3,4 et 5 termes obtenus au taux 0,2 le facteur de qualité garde la même valeur. On remarque aussi que dans le cas des écrans 4-2D, la croissance du facteur de qualité est très lente par rapport à ce qu'elle est dans le cas des écrans $\lambda_3 - \lambda_{13}$ obturés au même taux. Ce facteur augmente brusquement quand on passe de n = 6 à n = 7 termes, puis son augmentation est extrêmement lente. Ces faits ont pour conséquence qu'il est impossible de déterminer le meilleur écran correspondant au critère choisi. On ne sait en effet pas à partir de combien de termes sera atteint le facteur de qualité maximum Q_M , la convergence des facteurs Q vers Q_M n'étant pas régulière.

d) les fonctions de transmission des apodiseurs.1°) Cas de l'intervalle d'apodisation $\lambda_3 - \lambda_{13}$.

Pour les taux d'obturation de 0,1 et 0,2 nous avons calculé les écrans jusqu'à $p = n-1 = 6$, c'est à dire à 7 termes. Pour le taux d'obturation de 0,3, où l'apodisation est plus difficile, nous avons poussé le calcul jusqu'à 9 termes.

Dans tous ces cas, les fonctions de transmission calculées sont partout positives. Leurs tracés sont simples et présentent généralement

un maximum vers $r = 0,25$. Au taux 0,3, un deuxième maximum apparaît avec l'écran à 6 termes. Ce maximum est situé sur le bord intérieur de l'apodiseur et sa valeur augmente avec le nombre de termes tandis que la valeur du maximum situé à $r = 0,25$ diminue.

Le tableau de la page 105 donne les coefficients normalisés des apodiseurs calculés et la figure 62 a présente les profils des fonctions de transmission les plus caractéristiques.

Coefficients des apodiseurs calculés pour l'intervalle
 $\lambda_3 - \lambda_{13}$ en présence d'un disque obturateur.

n	t	a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇	a ₈
1	0,1	1								
1	0,2	1								
1	0,3	1								
2	0,1	0,4931	0,5260							
2	0,2	0,9506	0,0576							
2	0,3	0,7475	0,2524							
3	0,1	0,5437	0,4008	-0,9081						
3	0,2	0,5389	0,3591	-0,9514						
3	0,3	0,5925	0,0051	-0,0061						
4	0,1	0,5155	0,4413	-0,9136	-0,0644					
4	0,2	0,5386	0,3588	-0,9509	-0,0001					
4	0,3	0,6745	0,1632	-0,6226	0,4535					
5	0,1	0,5210	0,4309	-0,9288	-0,0627	-0,0181				
5	0,2	0,5389	0,3572	-0,9531	-0,0010	-0,0024				
5	0,3	0,6752	0,1673	-0,6177	0,4577	0,0031				
6	0,1	0,5195	0,4340	-0,9166	-0,0538	-0,0122	0,0221			
6	0,2	0,5405	0,4050	-0,8692	0,0854	0,0748	0,0815			
6	0,3	0,7999	0,9155	0,3980	1,4436	0,7081	0,3612			
7	0,1	0,5179	0,4303	-0,9184	-0,0561	-0,0158	0,0187	-0,0097		
7	0,2	0,5481	0,4491	-0,8036	0,1597	0,1507	0,1417	0,0512		
7	0,3	1,0861	2,4936	2,6615	3,7637	2,5400	1,4459	0,4476		
8	0,3	1,4362	5,3938	7,1937	8,3697	6,5702	4,2188	1,9398	0,5520	
9	0,3	1,9474	8,6878	12,338	13,992	11,701	8,0807	4,3430	1,7117	0,38

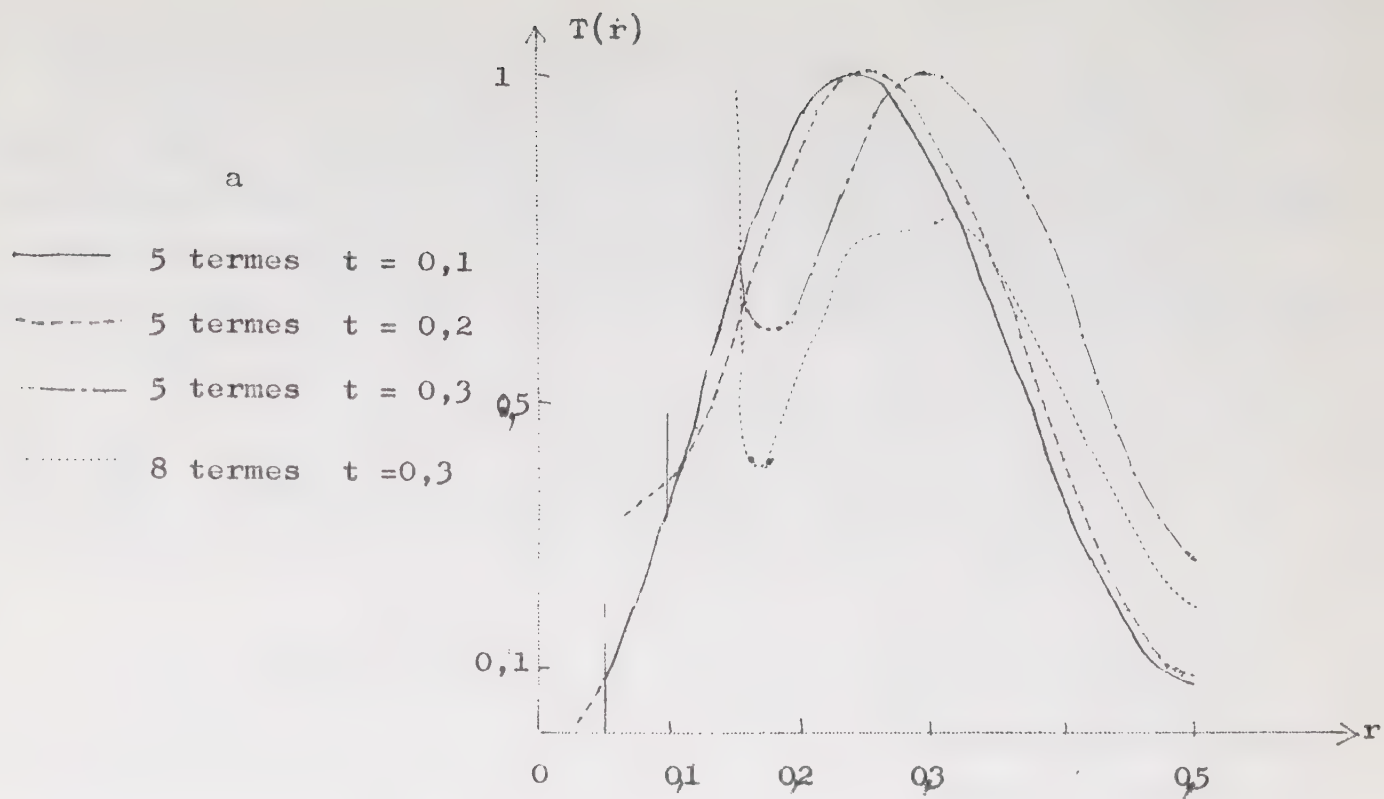
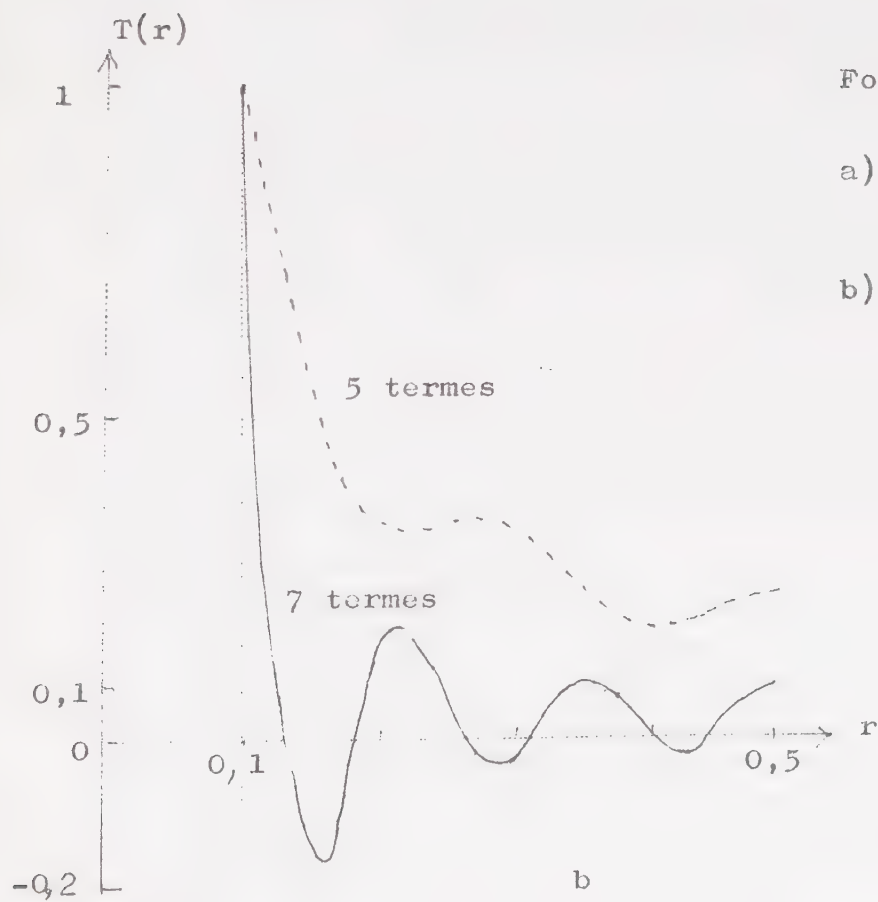


Fig. 62 a et b



Fonctions apodisantes annulaires

a) intervalle d'apodisation

$$\lambda_3 - \lambda_{13}$$

b) intervalle d'apodisation 4-20

2°) Cas de l'intervalle d'apodisation 4-20.

Le tableau de la page 103 montre que les facteurs de qualité des écrans calculés pour cet intervalle peuvent être groupés en deux paliers de valeurs bien différents : l'un d'environ 35, l'autre de 206.

Nous avons donc choisi d'étudier un écran de chaque groupe : à savoir l'écran à 5 termes et l'écran à 7 termes. Voici les coefficients de ces écrans $T_5'(r)$ et $T_7'(r)$.

n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
5	0,317	0,493	0,401	0,359	0,317		
7	0,175	0,814	1,243	1,452	1,429	1,142	0,748

Les fonctions de transmission présentées sur la figure 62 b ont une structure complexe. Déjà pour l'écran à 5 termes, la fonction partout positive, présente des oscillations. Ces oscillations deviennent plus nombreuses et plus importantes pour l'écran à 7 termes et de plus certaines parties de la fonction sont négatives. Un tel écran serait très difficile à réaliser. Enfin ces apodiseurs sont très nombreux, ce qui en limiterait beaucoup l'emploi du fait de l'assombrissement du système optique qu'ils provoqueraient. La transmission totale de l'apodiseur ci-dessus à 7 termes n'est que de 0,01.

f) les figures de diffraction données par les apodiseurs.

1°) Cas de l'intervalle d'apodisation $\lambda_3 - \lambda_{13}$.

Disons tout de suite que d'une façon générale, l'apodisation obtenue ne déçoit pas et qu'elle est, pour les trois taux d'obturation, largement suffisante.

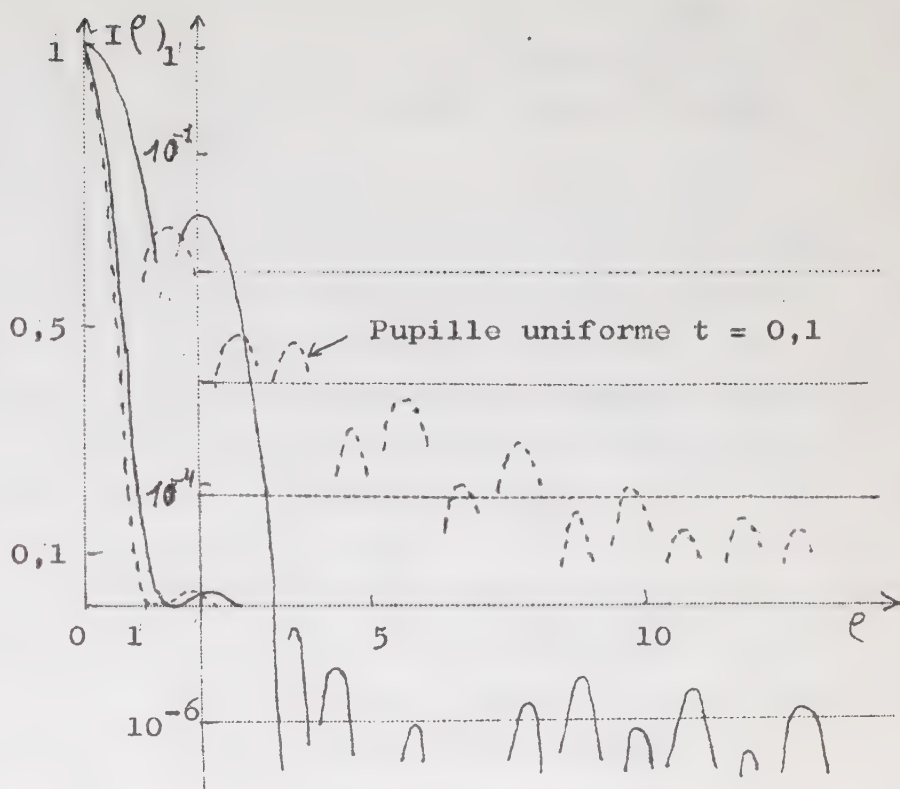
Pour le taux 0,1 nous avons représenté sur la figure 63a la figure de diffraction de l'écran à 5 termes. On remarque que sur tout l'intervalle $\lambda_3 - \lambda_{13}$, et même plus loin, le facteur de réduction des intensités est au moins de 100.

Pour le taux 0,2, la figure 63 b montre que le facteur de réduction obtenu avec l'écran à 5 termes est supérieur à 10. On notera ici que le 4^e anneau obtenu est très large et compte plusieurs maxima et minima. Il correspond à 4 anneaux de la figure de diffraction de la pupille uniforme obturée au même taux. Une disposition analogue se retrouve

Fig. 63 a, b, c et d

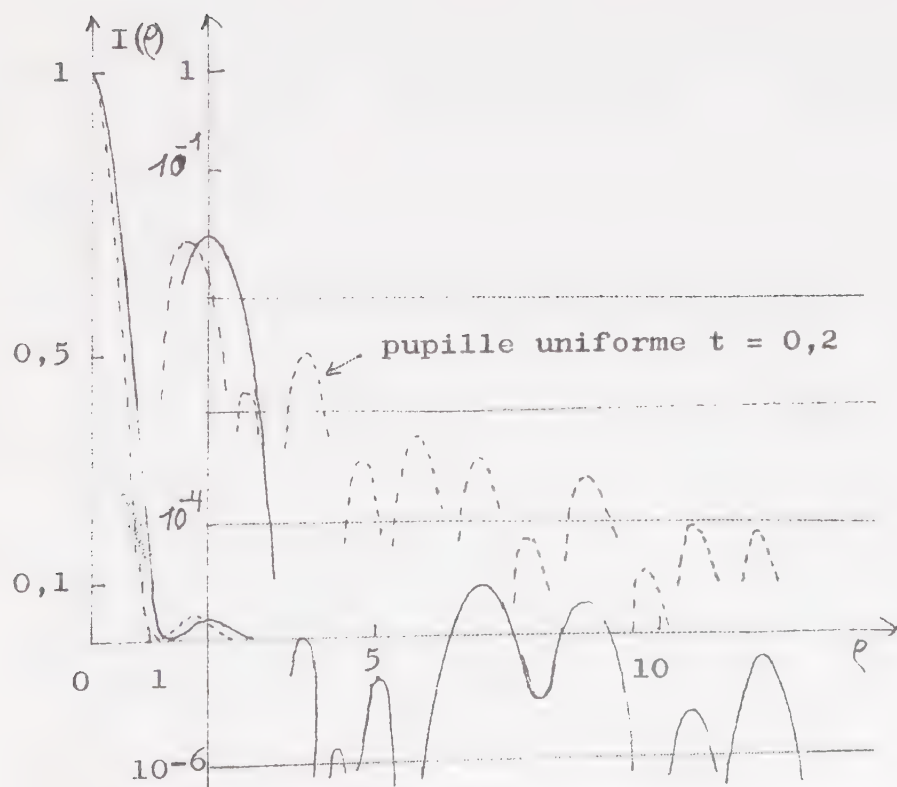
Figures de diffraction
associées aux fonctions
apodisantes annulaires
calculées pour apodi-
ser sur l'intervalle
 $\lambda_3 - \lambda_{13}$

- a 5 termes, taux 0,1
- b 5 termes, taux 0,2
- c 5 termes, taux 0,3
- d 8 termes, taux 0,3



a .

5 termes , taux 0,1



b

5 termes, taux 0,2

pour les figures de diffraction des écrans à 6 et 7 termes. Il y a donc une réduction du nombre des anneaux compensée par un élargissement notable d'un ou plusieurs anneaux.

Pour le taux d'obturation 0,3, on a encore un facteur de réduction de 5 environ pour la figure de diffraction de l'écran à 5 termes, ainsi que le montre la figure 63 c. Pour l'écran à 8 termes, figure 63 d, le facteur de réduction des intensités est de 7 environ. Pour tous les écrans calculés pour ce taux d'obturation, on obtient également une réduction du nombre des anneaux de la figure de diffraction compensée par un élargissement d'un ou plusieurs anneaux.

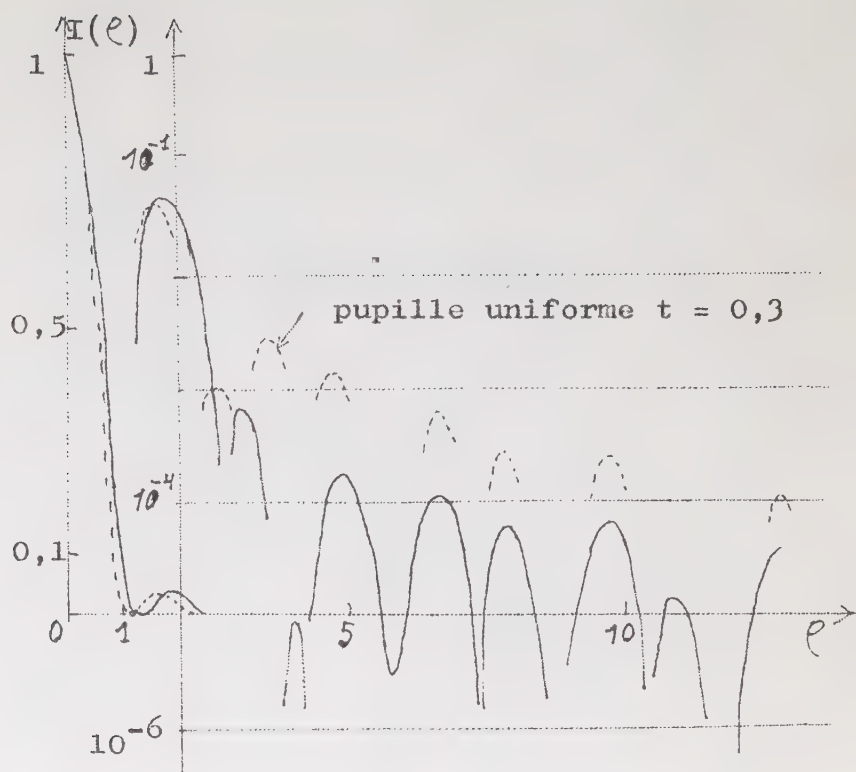
2°) Cas de l'intervalle d'apodisation 4 - 20.

L'écran à 5 termes donne des résultats médiocres (fig. 64 a) ; le premier anneau est bien apodisé, mais pour les suivants on n'a plus de gain. Si l'on passe à l'écran à 7 termes (fig. 69 b) , les résultats sur tout l'intervalle d'apodisation sont bien meilleurs. Pour les anneaux on a un facteur de réduction des intensités qui est au minimum de l'ordre de 3. On remarque, en contrepartie, qu'au delà de $\pi \rho = 20$, les anneaux deviennent très intenses. Malheureusement, comme nous l'avons déjà dit, cet apodiseur n'est pratiquement pas réalisable ni utilisable.

On voit donc que dans le cas de l'apodisation près du centre de la figure de diffraction, le problème est ardu à résoudre et qu'il faut, pour le moment, se contenter de solutions assez médiocres.

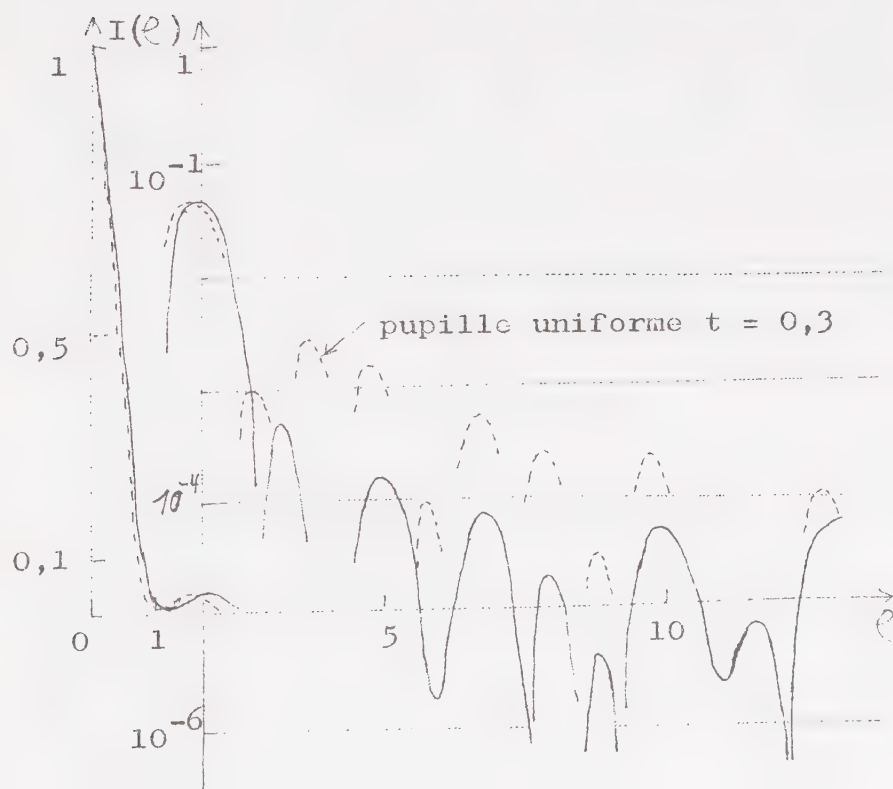
Remarque : sur toutes les figures de diffraction étudiées ici, on peut voir que le centre est élargi de façon notable. On vérifie donc que l'abaissement des pieds de la figure de diffraction s'accompagne généralement d'un élargissement du centre de la figure.

On pourrait imposer une condition supplémentaire aux apodiseurs : à savoir qu'il n'y ait pas d'élargissement du centre de la figure de diffraction par rapport à la figure de diffraction de la pupille uniforme, c'est à dire que pour $I(\rho_1)/I(0) = 0,405$ on ait même ρ_1 pour les différentes pupilles, 0,405 étant la valeur de ce rapport mesuré à une demi-unité du centre ($\xi_1 = 1/2$) pour la pupille rectilinéaire uniforme (fig. 65).



63. c

5 termes $t = 0,3$



63. d

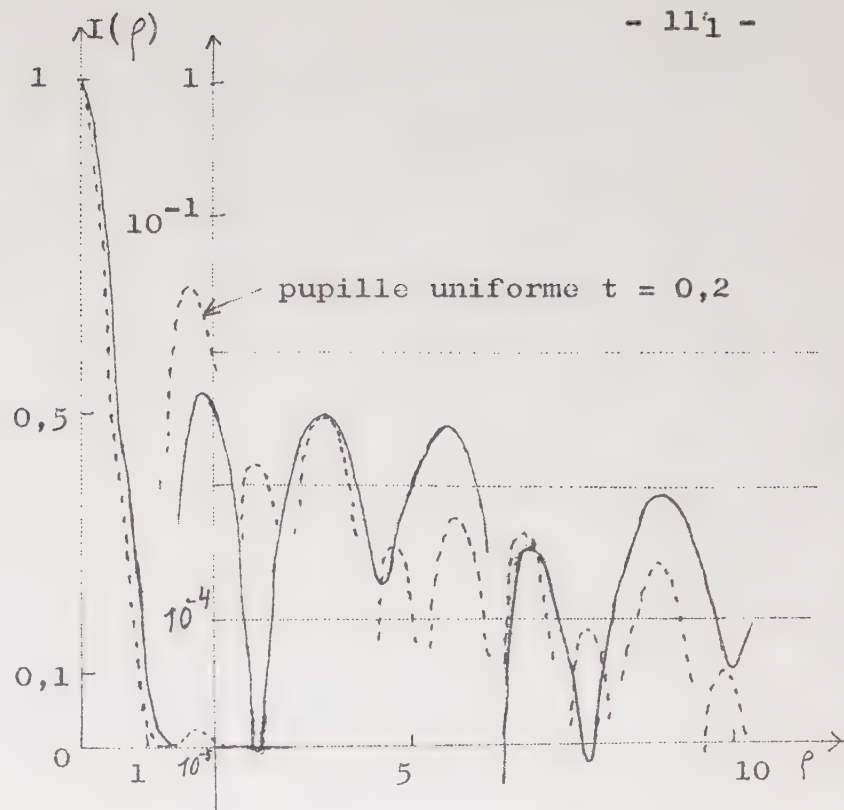
3 termes $t = 0,3$

Fig. 64 a et b

Figures de diffraction
associées aux fonctions
apodisantes annulaires
calculées pour apodi-
ser sur l'intervalle
4-20

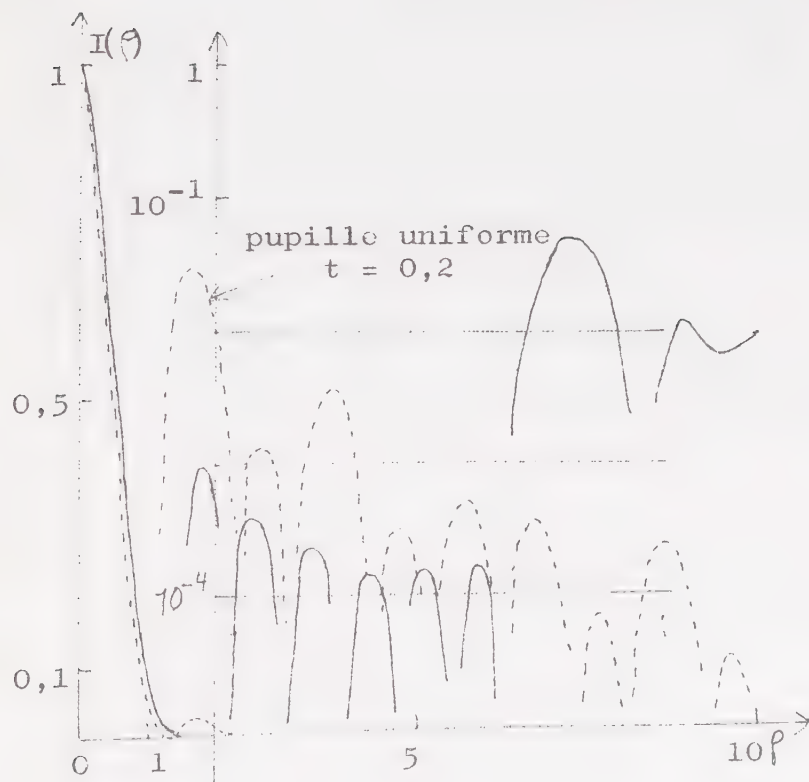
a) 5 termes $t = 0,2$

b) 7 termes $t = 0,2$



a

5 Termes $t = 0,2$



b

7 termes $t = 0,2$

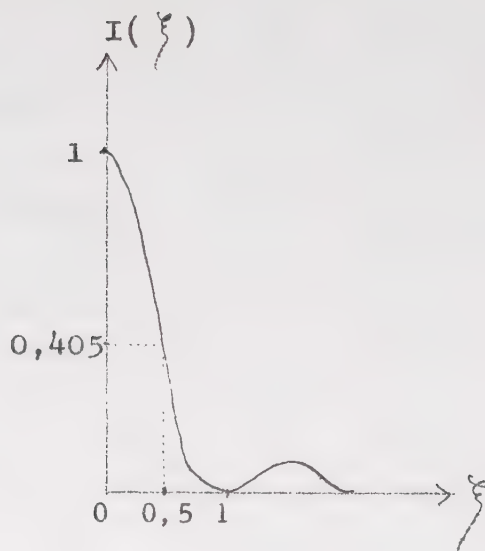


Fig. 65

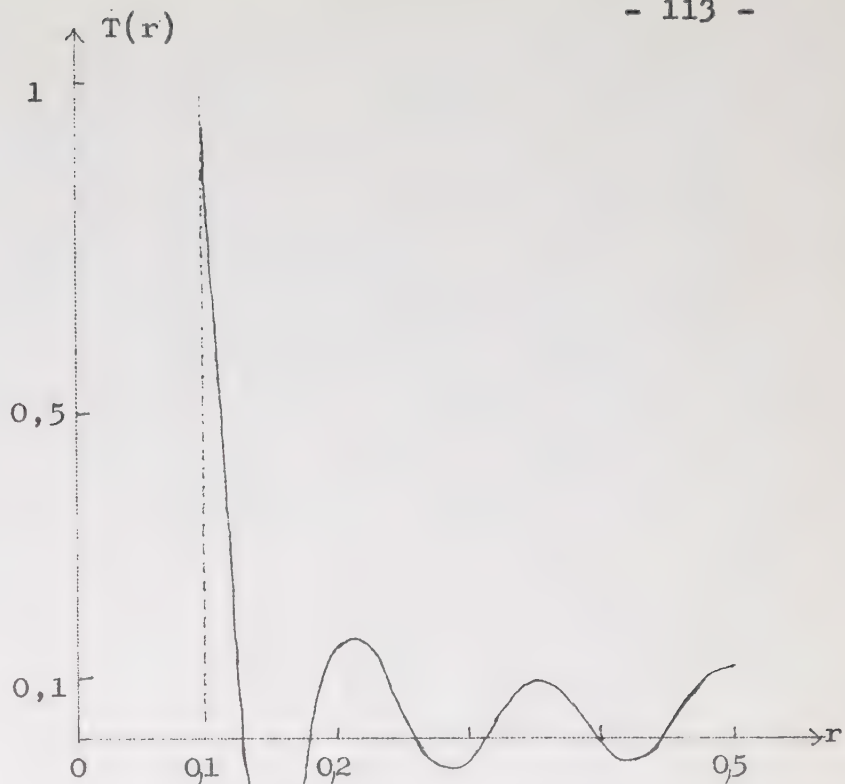
Avec l'intervalle d'apodisation 4 - 20 utilisé, les écrans obtenus sont encore plus défavorables que lorsque l'on admet l'élargissement du centre de la figure de diffraction. La figure 66 a montre l'écran à 7 termes calculé pour le taux d'obturation de 0,2. Cet écran est extrêmement sombre et irréalisable. La figure 66 b présente la figure de diffraction donnée par cet écran. On voit que les gains obtenus sont très faibles.

La condition de non élargissement du corps de la figure de diffraction rend donc l'apodisation encore plus difficile.

Fig. 66 a et b

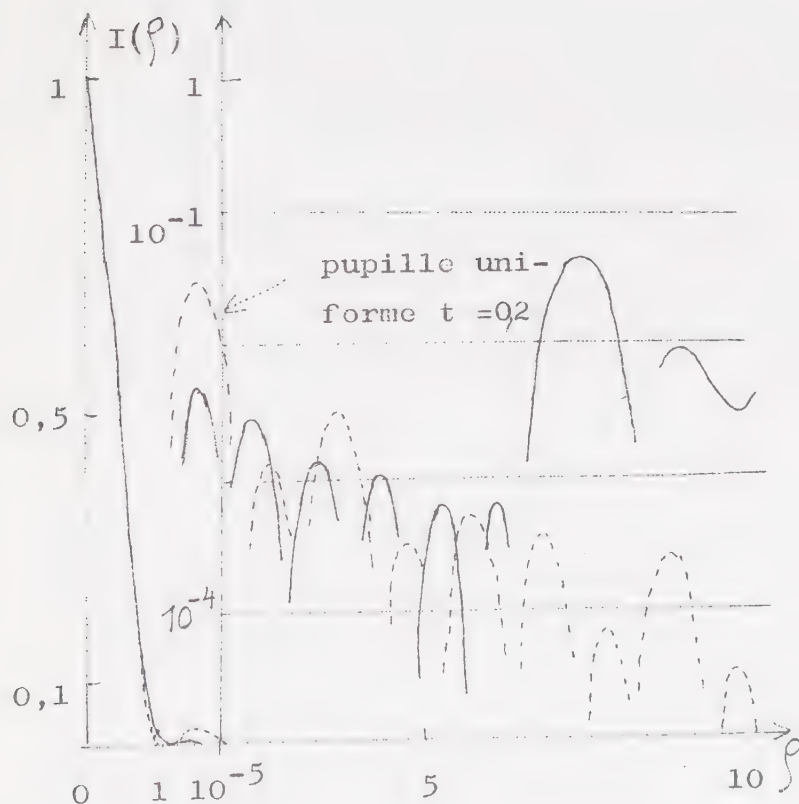
Courbe représentative de la fonction apodisante annulaire (taux = 0,2) à 7 termes calculée pour apodiser sur l'intervalle 4-20, sans élargissement du centre de la figure de diffraction.

Figure de diffraction associée.



a

fonction apodisante



b

figure de diffraction associée.

1-3. Etude des fonctions de transfert des apodiseurs annulaires en vue de leur correction.

1-3-1. Calcul de la fonction de transfert.

Ici aussi, le calcul peut se faire en utilisant la fonction d'autocorrélation de l'amplitude pupillaire après avoir approximé la fonction d'amplitude pupillaire $T(r)$ par un système de base $(1-4r^2)^p$. L'expression générale de $G(v)$ est identique à celle que nous avons donnée dans le cas des apodiseurs circulaires non obturés : $G(v)$ est une somme d'intégrales du type

$$G_1(v) = 4 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \sum_0^n a'_p [1-4(x^2+y^2)]^p \cdot \sum_0^n a'_p [1-4\{(x-v)^2+y^2\}]^q dy$$

La signification des limites x_1, x_2, y_1, y_2 est précisée sur la figure 67.

Mais le nombre d'intégrales doubles à calculer est fortement majoré du fait de l'obturation centrale qui oblige à sérier le calcul. On distingue 7 types d'intégrales qui diffèrent par la valeur des limites en fonction de v . Les groupements de ces intégrales pour former $G(v)$ sont d'ailleurs différents selon que le taux d'obturation est inférieur ou supérieur à $1/3$, $t = 1/3$ constituant un cas limite.

Voici les 7 groupes de limites.

	x_1	x_2	y_1	y_2
$G_1(v)$	$v/2$	$v + t/2$	$\sqrt{\frac{t^2}{4} - (x-v)^2}$	$\sqrt{1/4 - x^2}$
$G_2(v)$	$v + t/2$	$1/2$	0	$\sqrt{1/4 - x^2}$
$G_3(v)$	$v/2$	$v - t/2$	0	$\sqrt{1/4 - x^2}$
$G_4(v)$	$v - t/2$	$v + t/2$	$\sqrt{\frac{t^2}{4} - (x-v)^2}$	$\sqrt{1/4 - x^2}$
$G_5(v)$	$v - t/2$	$\frac{1-t^2+4v^2}{8v}$	$\sqrt{\frac{t^2}{4} - (x-v)^2}$	$\sqrt{1/4 - x^2}$
$G_6(v)$	$v/2$	$1/2$	0	$\sqrt{1/4 - x^2}$
$G_7(v)$	$v/2$	$\frac{1-t^2+4v^2}{8v}$	$\sqrt{\frac{t^2}{4} - (x-v)^2}$	$\sqrt{1/4 - x^2}$

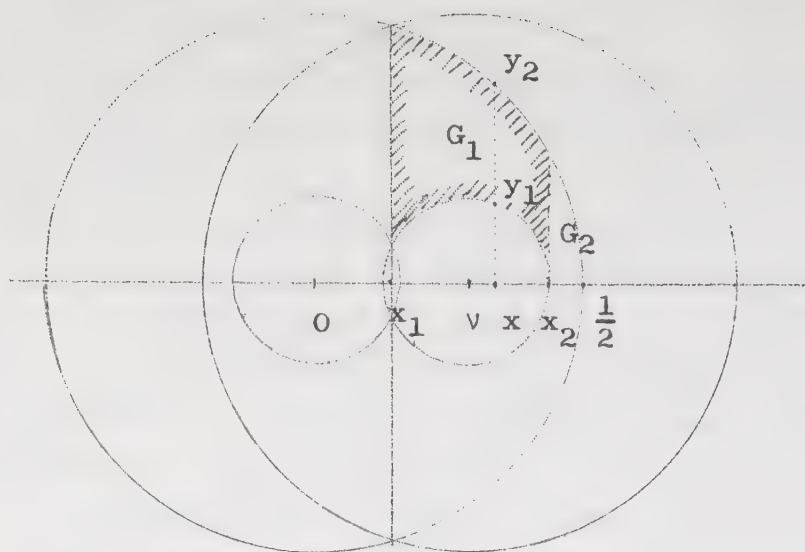


Fig. 67

La figure ci-dessus montre par exemple les aires communes à l'apodiseur ^{et à l'apodiseur} décalé de v sur lesquelles on effectue l'intégration pour obtenir les intégrales G_1 et G_2 (dans le cas $0 \leq t \leq 1/3$, pour $0 \leq v \leq t$).

La fonction de transfert $G(v)$ d'un apodiseur obturé au taux t est donnée par les combinaisons suivantes des intégrales $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ et G_7 .

1°) $0 \leq t \leq 1/3$

v	0	t	$(1-t)/2$	$(1+t)/2$	1
$G(v)$	$G_1 + G_2$	$G_2 + G_3 + G_4$	$G_3 + G_5$	G_6	

2°) $1/3 \leq t \leq 1$

v	0	$(1-t)/2$	t	$(1+t)/2$	1
$G(v)$	$G_1 + G_2$	G_7	$G_3 + G_5$	G_6	

3°) $t = 1/3$

v	0	t	$(1+t)/2$	1
$G(v)$	$G_1 + G_2$	$G_3 + G_5$	G_6	

1-3-2. Propriétés caractéristiques de la fonction de transfert d'un apodiseur annulaire.

Nous avons déterminé expérimentalement la fonction de transfert de l'apodiseur T' utilisé avec une pastille obturatrice centrale, le taux d'obturation étant 0,3.

Sur la figure 68 sont représentées les fonctions de transfert de l'apodiseur obturé au taux 0,3, du même apodiseur non obturé et de la pupille annulaire uniforme de même diamètre, obturée au taux 0,3. On peut remarquer et ceci se révèlera très important dans la suite, que la fonction de transfert de l'apodiseur obturé est une fonction continue pour v compris entre -1 et $+1$, avec un maximum au centre pour $v = 0$. La fonction de transfert d'une pupille obturée (apodisante ou non) n'est pas 'obturée', mais l'obturation de la pupille se traduit par une forme moins régulière de $G(v)$. La fonction de transfert porte seulement une marque de l'obturation de la pupille.

1°) Si l'on compare les fonctions de transfert de l'apodiseur obturé et de l'apodiseur non obturé, on remarque que l'obturation a pour effet de diminuer beaucoup la transmission des basses fréquences ($v < 0,40$), les hautes fréquences ($v > 0,65$) étant transmises de façon quasi identique. Les fréquences moyennes ($0,40 < v < 0,65$) passent un peu mieux dans l'apodiseur obturé.

2°) Si l'on compare les fonctions de transfert de l'apodiseur et de la pupille uniforme obturés au même taux, on remarque que l'apodisation a pour effet de laisser, en moyenne inchangée la transmission des fréquences basses et moyennes ($v < 0,5$) tandis que la transmission des hautes fréquences ($v > 0,5$) est très diminuée. Les très basses fréquences ($v < 0,1$) ainsi que les fréquences moyennes comprises entre 0,3 et 0,5 passent un peu mieux dans l'apodiseur, les fréquences moyennes comprises entre 0,1 et 0,3 passant un peu moins bien.

On peut donc dire que l'obturation et l'apodisation produisent des effets inverses sur la courbe $G(v)$.

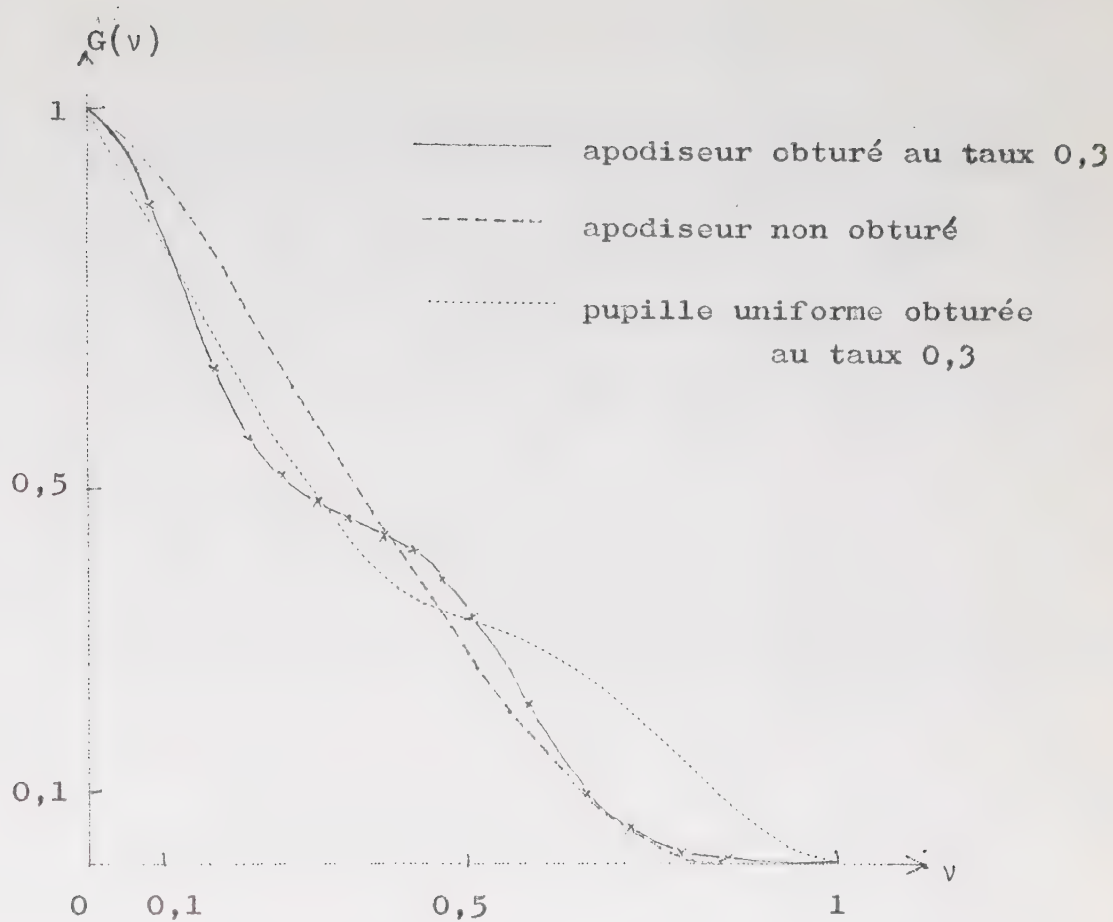


Fig. 68

Courbes représentatives des fonctions de transfert

de l'apodiseur $T'(r)$ obturé au taux 0,3

de l'apodiseur $T'(r)$ non obturé

de la pupille annulaire uniforme de même diamètre
obturée au taux 0,3

2 - CORRECTION A POSTERIORI DES PUPILLES ANNULAIRES.

Les corrections *à priori* à l'aide d'écrans apodisants semblent, nous l'avons vu aboutir à un semi-échec dans le cas des pupilles annulaires, surtout lorsque l'on cherche à apodiser près du centre de la figure de diffraction. Mais les corrections que réalise ainsi l'appareil lui-même, en convoluant la fonction d'appareil $I_0(\rho)$ avec une fonction correctrice $C(\rho)$ (ou en multipliant la fonction de transfert $G_0(v)$ par une fonction correctrice $\gamma(v)$) ne sont peut être pas les seules imaginables.

2-1. Les corrections imaginables.

En effet, nous avons vu que les fonctions $G(v)$ auxquelles on a accès par la méthode *à priori* sont des fonctions d'autocorrélation qui sont le produit de la fonction d'autocorrélation primaire $T_0 * T_0$ par une fonction γ .

En transposant à l'optique une idée de WILD [28] sur l'amélioration des propriétés d'une antenne annulaire pour la radioastronomie, P. JACQUINOT ET B. ROIZEN [1] ont proposés de convoluer l'image obtenue $E(\xi, \eta)$ d'un objet quelconque $O(\xi, \eta)$ avec une fonction correctrice de façon à obtenir directement l'image corrigée cherchée.

$$E(\xi, \eta) * C(\xi, \eta) = E'(\xi, \eta).$$

Mais $E(\xi, \eta) = O(\xi, \eta) * I_0(\xi, \eta)$, et par suite

$$\begin{aligned} E'(\xi, \eta) &= [O(\xi, \eta) * I_0(\xi, \eta)] * C(\xi, \eta) = O(\xi, \eta) * [I_0(\xi, \eta) * C(\xi, \eta)] \\ &= O(\xi, \eta) * F(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Tout se passe comme si on avait une nouvelle fonction d'appareil F et une nouvelle fonction de transfert :

$$G(v) = T \text{ de } F \{ I_0 * C \} = G_0(v, \mu) \cdot \gamma(v, \mu),$$

$\gamma(v, \mu)$ désigne la transformée de FOURIER de $C(\xi, \eta)$.

G et G_0 ont même domaine en général, les zéros de G_0 étant aussi zéros de G . Mais G n'a plus aucune raison d'être une fonction d'autocorrélation, et $F(\xi, \eta)$ n'est plus en général, un carré parfait (carré d'une amplitude diffractée). $F(\xi, \eta)$ est, sauf cas particulier, une fonction d'amplitude à arches positives et négatives.

En plus, elle aura une densité de zéros correspondant à la transformée d'une fonction de domaine 2 alors que la fonction d'intensité diffractée qui était un carré de transformée de fonction pupillaire de domaine 1, avait les mêmes zéros que cette transformée de fonction pupillaire de domaine 1 : donc elle avait une densité de zéros deux fois moindre, [29] .

Il y a donc toute une classe de fonctions correctrices qui sont laissées de côté lorsque l'on ne considère que les corrections pupillaires.

2-2. Application au cas des pupilles annulaires.

La méthode de correction *à posteriori* paraît devoir donner des résultats intéressants dans le cas des pupilles annulaires.

En effet, nous venons de voir que des solutions nouvelles pouvaient être recherchées sous la forme de fonctions d'appareil du type fonctions d'amplitude $\mathcal{H}(2\rho)$. Nous n'aborderons pas ici dans toute sa généralité le problème du choix d'une bonne fonction $\mathcal{H}(2\rho)$ car nous voudrions montrer qu'un autre type de solutions nouvelles se présente à nous de façon très directe.

Les considérations qui suivent auront l'avantage de nous permettre de prévoir sans longs calculs les performances que la méthode de correction par convolution peut assurer dans le cas des pupilles annulaires, et de marquer les raisons de son efficacité.

Nous avons vu que la fonction de transfert d'une pupille annulaire $G_0(v)$ n'était pas "obturée". Par conséquent, on doit, en multipliant cette fonction de transfert $G_0(v)$ par une fonction correctrice $\gamma(v)$ convenable, pouvoir l'identifier avec des fonctions de transfert $G(v)$ de pupilles circulaires non obturées pour lesquelles nous savons qu'il existe de bonnes solutions au problème de l'apodisation. La catégorie de fonctions d'appareil que l'on va atteindre ainsi n'est pas la plus générale puisque les fonctions d'appareil sont des intensités diffractées mais ce sont des fonctions d'appareil que l'on n'aurait pas pu obtenir par une opération pupillaire puisque ^{ce} sont des intensités de pupilles apodisantes non obturées.

La seule condition pour que la méthode soit applicable est que la fonction de transfert $G(v)$ que nous choisirons soit nulle aux bords

et qu'au voisinage des bords elle soit un infiniment petit du même ordre au moins que la fonction $G_0(v)$ initiale. Ainsi la fonction correctrice $\gamma(v) = \frac{G(v)}{G_0(v)}$ ne deviendra pas infinie, et sa transformée de FOURIER, $C(\xi)$ existera bien.

2-3. Difficulté de réalisation de la correction à postériori.

Dans le cas de la correction à priori, c'est l'appareil lui-même qui effectuait la convolution grâce à l'apodiseur placé sur la pupille.

Des moyens pour réaliser par un procédé physique la convolution entre l'image $E(\xi, \eta)$ et une correctrice $C(\xi, \eta)$ ont été suggérés par certains auteurs [29]. Toutefois ils n'ont pas encore été mis en oeuvre, à notre connaissance. Une difficulté se présente, dans le cas général, du fait que la fonction C n'est pas partout positive.

Cette difficulté disparaît si l'on effectue la correction par le calcul à partir de l'image enregistrée. Mais l'image $E(\xi, \eta)$ étant en général à deux dimensions, l'enregistrement et le calcul constituent des opérations longues et compliquées.

Il existe tout de même deux cas où les calculs se simplifient parce que la convolution est à une seule dimension.

2-4. Cas particuliers.

Nous en envisagerons deux : nous désirons regarder

- 1) un objet ligné, une mire par exemple,
- 2) un objet formé de points lumineux alignés sur un axe.

2-4-1. Objet ligné.

Lorsque l'appareil à pupille circulaire forme l'image d'un objet ligné, par exemple une mire, dans lequel la répartition de luminance ne dépend que d'une seule variable ξ , on peut considérer que l'image, au lieu de résulter de la convolution de l'objet fonction de ξ avec la fonction d'appareil à deux dimensions, $F(\xi, \eta)$ image du point, est la convolution de l'objet $O(\xi)$ avec l'image $f(\xi)$ d'un élément linéaire de l'objet (ligne infiniment fine d'abscisse $\xi = c^{te}$).

On a $E(\xi) = O(\xi) * f(\xi)$ et en passant aux transformées de FOURIER $\sigma(v) = S(v) \cdot G(v, 0)$.

Nous avons en effet montré que la transformée de FOURIER de $f(\xi)$ n'était autre que la valeur pour $\mu = 0$ de la fonction de transfert $G(v, \mu)$.

Pour corriger cette fonction de transfert $G(v, 0)$ il faut la remplacer par une fonction $G'(v)$ à transformée de FOURIER apodisante.

Voici l'exemple simple sur lequel nous raisonnerons pour montrer les possibilités de la méthode. On sait que la première répartition apodisante qui ait été envisagée est la répartition en triangle $T(x) = 1 - 2 |x|$ (dérivée du diaphragme en losange, obtenu par simple rotation du diaphragme carré qui est d'un usage fréquent en spectroscopie). La fonction d'appareil correspondante est bien apodisée

$(I(\xi) = \frac{\sin^4 \pi \xi / 2}{(\pi \xi / 2)^4})$ et il serait intéressant d'obtenir un résultat aussi bon avec les pupilles annulaires qui ont de très mauvaises fonctions d'appareil.

Nous prenons pour $G'(v)$ la fonction de transfert de la pupille rectilinéaire $1 - 2 |x|$.

La fonction de transfert $G'(v)$ se calcule facilement :

1° Pour $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$

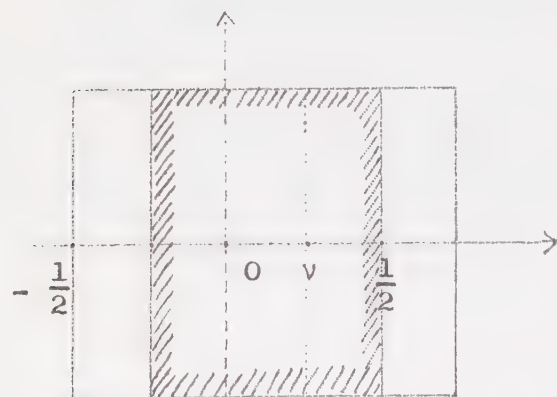


Fig. 69 a

$$\begin{aligned}
 G'_1(v) &= \int_{v-1/2}^0 (1-2x) [1-2(v-x)] dx \\
 &+ \int_0^v (1-2x) [1-2(v-x)] dx \\
 &+ \int_v^{1/2} (1-2x) [1+2(v-x)] dx \\
 &= \frac{1}{3} - 2v^2 + 2v^3
 \end{aligned}$$

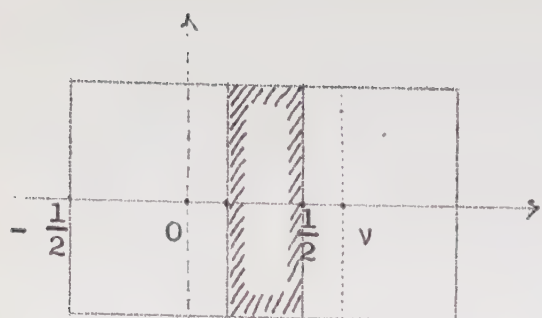


Fig. 69 b

2°) Pour $\frac{1}{2} \leq v \leq 1$

$$G'_2(v) = \int_{v-1/2}^{1/2} (1-2x) [1-2(v-x)] dx$$

$$= \frac{2}{3} - 2v + 2v^2 - \frac{2}{3} v^3$$

$$\text{Finalement : } G'(v) = \begin{cases} \frac{1}{3} - 2v^2 + 2v^3 & \text{pour } 0 \leq v \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} - 2v + 2v^2 - \frac{2}{3} v^3 & \text{pour } \frac{1}{2} \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Sur la figure 70 nous avons représenté cette fonction ainsi que la fonction de transfert de la pupille obturée au taux 0,2, $G_0(v)$.

Nous pouvons en déduire la fonction $\gamma'(v)$ par laquelle il faut multiplier la fonction de transfert $G_0(v)$ pour obtenir $G'(v)$ (fig. 71).

Le calcul de la transformée de FOURIER de $\gamma'(v)$ donne la fonction correctrice $C'(\xi)$ par laquelle il faut convoluer la figure de diffraction de la ligne donnée par la pupille circulaire uniforme obturée au taux 0,2 pour obtenir la figure de diffraction de la pupille 1-2 $|x|$. Cette fonction est représentée sur la figure 72. On remarque qu'elle décroît assez vite ; il sera donc possible de la tronquer pour effectuer le calcul.

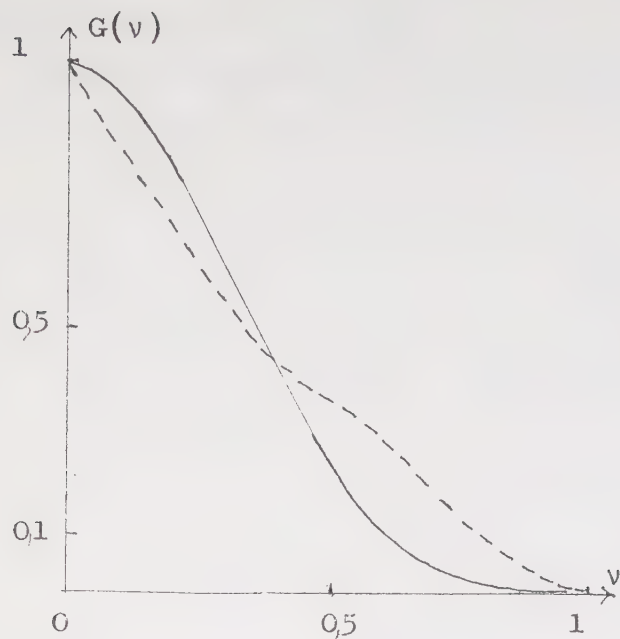


Fig. 70 Fonctions de transfert
 — $G'(v)$ de l'apodiseur $1-2|x|$
 ---- $G_0(v)$ de la pupille uni-
 forme obturée au taux 0,2.

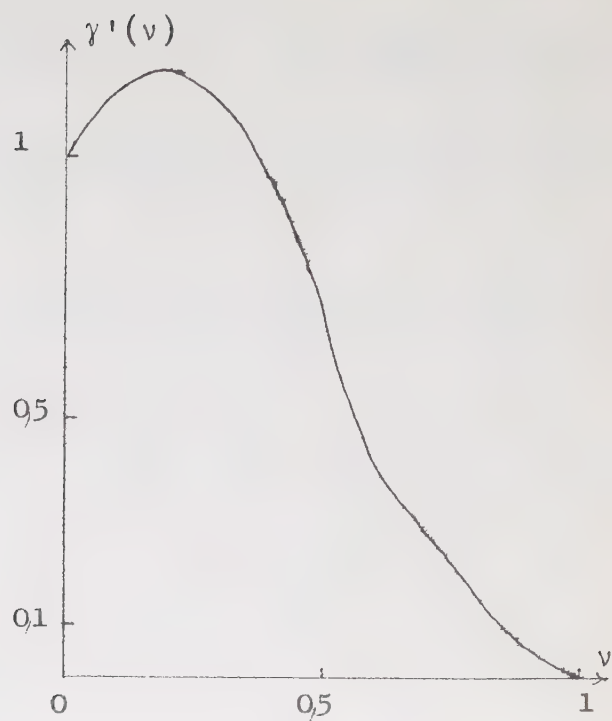


Fig. 71 Courbe représentative de
 la fonction correctrice $\gamma'(v) = \frac{G'(v)}{G_0(v)}$

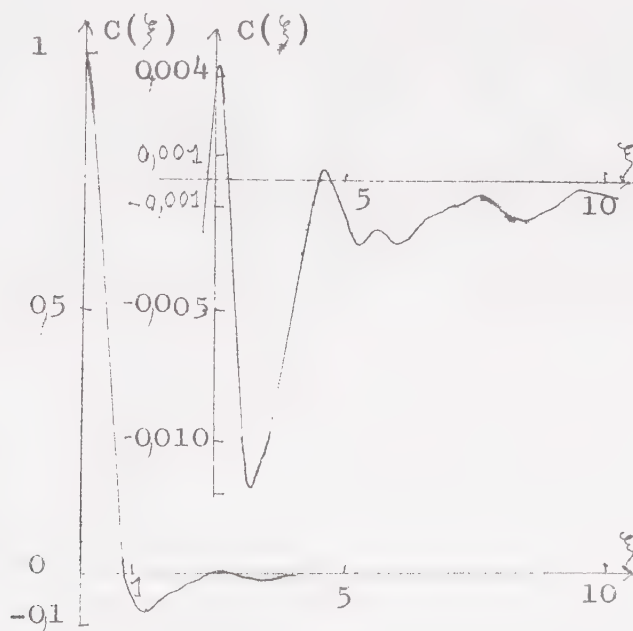


Fig. 72. Courbe représentative de la fonction correctrice $C(\xi)$,
 transformée de FOURIER de $\gamma'(v)$.

2-4-2. Points alignés suivant une droite.

Ce cas se rencontre en astronomie lorsque l'on observe une étoile double par exemple.

L'objet comporte des points suivant une droite et une droite seulement. L'image, sur l'axe, peut s'écrire :

$$E(\xi) = O(\xi) * I(\xi, 0).$$

Il n'est besoin de considérer que la valeur de la fonction d'appareil sur l'axe des ξ puisqu'il n'y a pas de points en dehors de l'axe qui viendraient apporter leur lumière parasite sur cet axe. L'équation ci-dessus ne donne évidemment que l'image sur l'axe. Au voisinage de l'axe le phénomène est un peu plus compliqué car les fonctions d'appareil vont se mêler. Mais en général, si on apodise l'axe, son voisinage se trouve automatiquement apodisé aussi par raison de continuité et l'effet est suffisant, dans la majorité des cas, pour ne pas gêner l'observation qu'on se propose de faire.

La transformée de FOURIER de l'image sur l'axe $E(\xi)$ est

$$O(v) = S(v) \cdot T. \text{ de F. } \{I(\xi, 0)\}.$$

La fonction de transfert intéressante ici est la transformée de FOURIER de $I(\xi, 0)$; ce n'est pas $G(v, 0)$.

Calcul de cette fonction de transfert : d'une façon générale

$$I(\xi, \eta) = \iint G(v, \mu) \exp 2\pi j (v\xi + \mu\eta) dv d\mu. \text{ Si on fait } \eta = 0$$

$$I(\xi, 0) = \iint G(v, \mu) \exp 2\pi j v \xi dv d\mu \text{ ou}$$

$$I(\xi, 0) = \int \left[\int G(v, \mu) d\mu \right] \exp 2\pi j v \xi dv. \text{ Si on pose}$$

$$\int G(v, \mu) d\mu = F(v) \text{ on a}$$

$$I(\xi, 0) = \int F(v) \exp 2\pi j v \xi dv.$$

$I(\xi, 0)$ est la transformée de FOURIER de $F(v)$ et inversement la transformée de FOURIER de $I(\xi, 0)$ est $F(v)$.

Le problème est exactement le même que dans le cas précédent de l'objet ligné mais c'est $F(v)$ qu'il faudrait transformer pour définir

une autre fonction correctrice et non pas $G(v, 0)$.

$F(v)$ représente l'intégrale de $G(v, \mu)$; fonction de transfert de la pupille considérée, sommée par rapport à μ . Pour chaque v il faut intégrer $G(v, \mu)$ sur un axe des μ passant par le v considéré. En faisant le changement de variable $\mu = v \operatorname{tg} \theta$, $d\mu = \frac{v}{\cos^2 \theta} d\theta$

$$F(v) = 2 \int_0^{\operatorname{arc} \cos v} G(v, v \operatorname{tg} \theta) \frac{v}{\cos^2 \theta} d\theta.$$

$$\text{avec } G(v, v \operatorname{tg} \theta) = G\left(\frac{v}{\cos \theta}, 0\right).$$

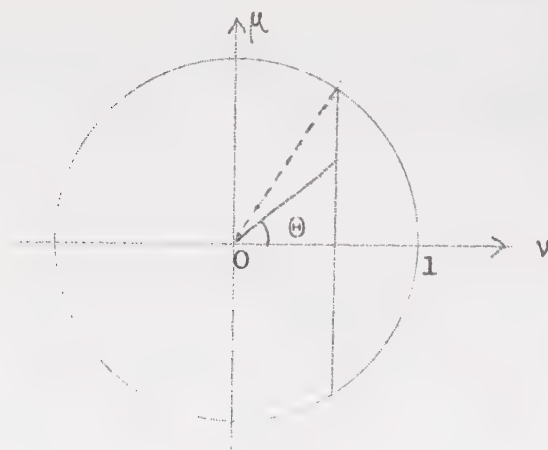


Fig. 73

On pourrait calculer ainsi la fonction $F_0(v)$ correspondant par exemple à la pupille obturée au taux 0,2 précédemment considérée. Pour obtenir le $G'(v)$ de la pupille en triangle il suffirait de convoluer l'image $E(\xi)$ obtenue sur l'axe des ξ avec la transformée de FOURIER $C(\xi)$ de $\gamma''(v) = \frac{G'(v)}{F_0(v)}$.

3. INFLUENCE DE LA CORRECTION DE LA FONCTION D'APPAREIL SUR LE RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT.

Lorsque l'on diminue la luminosité on altère le rapport signal sur bruit, donc on diminue la précision. En fait, en optique la précision est bonne quand le signal est grand par rapport au bruit.

3-1. Cas de l'apodisation a priori.

Les apodiseurs ont une transmission totale γ qui dépasse rarement 0,4. Leur emploi diminue donc considérablement la valeur du pic de la fonction d'appareil, soit $F(0)$, qui mesure la luminosité L de l'instrument.

Nous raisonnerons pour simplifier dans le cas rectilinéaire.

Soit $F_o(0)$ la luminosité de la pupille uniforme. La luminosité relative L_r est :

$$L_r = \frac{F(0)}{F_o(0)} = \frac{\int_0^1 G(v) dv}{\int_0^1 G_o(v) dv} = \frac{G(0)}{G_o(0)} \cdot \frac{\int_0^1 G_n(v) dv}{\int_0^1 G_{on}(v) dv}$$

$$L_r = \gamma \cdot \frac{\overline{G_n(v)}}{\overline{G_{on}(v)}}$$

où G_n , G_{on} désignent les fonctions de transfert normalisées

$$\frac{G(v)}{G(0)} \quad \text{ou} \quad \frac{G_o(v)}{G_o(0)} \quad \text{et où} \quad \overline{G_n(v)} \quad \text{désigne la valeur moyenne de } G_n(v).$$

Le rapport signal sur bruit est, dans le visible, proportionnel à la luminosité :

$$\frac{s}{b} = \frac{s_o}{b_o} \cdot L_r = \frac{s_o}{b_o} \gamma \frac{\overline{G_n(v)}}{\overline{G_{on}(v)}}.$$

3-2. Cas de l'apodisation à posteriori.

Que se passe-t-il lorsqu'on fait la correction par le calcul à partir de l'enregistrement de l'image ?

Le signal est celui que donne la pupille obturée initiale puisqu'on n'a pas modifié cette pupille. Toute la luminosité initiale est conservée. Il semblerait donc que l'apodisation à posteriori ne modifierait pas le rapport signal sur bruit.

En fait, le rapport est tout de même altéré. Lorsque l'on passe de l'enregistrement direct qui correspond à un certain signal s_0 et à un certain bruit b_0 à l'enregistrement corrigé par la convolution avec la fonction correctrice $C(\xi)$, on abîme le rapport car la convolution va changer différemment le signal et le bruit.

$$\text{On aura : } \frac{s}{b} = \frac{s_0}{b_0} \cdot Q ;$$

Q étant un facteur inférieur à 1 qui joue le même rôle qu'une luminosité ; nous l'appellerons dans la suite facteur de luminosité équivalente L'_r .

Madame D. ROBAUX a tout récemment calculé le facteur L'_r (Colloque sur les méthodes nouvelles en Spectroscopie Interférentielle, Bellevue, avril 1966). Son calcul met en jeu un raisonnement analogue à celui qu'emploie Madame CONNES [30], en Spectroscopie par Transformation de FOURIER, lorsqu'elle détermine l'effet sur $\frac{s}{b}$ d'une pondération de l'interférogramme. Madame ROBAUX a trouvé :

$$L'_r = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2(v)}} \cdot \frac{\overline{G_n(v)}}{\overline{G_{on}(v)}} \quad \text{où} \quad \gamma(v) = \frac{G_n(v)}{G_{on}(v)} .$$

Si donc on se proposait de réaliser la même correction en employant les deux méthodes, le gain en luminosité que donnerait la méthode de correction à posteriori serait :

$$\frac{L'_r}{L_r} = \frac{1}{\gamma \sqrt{\gamma^2(v)}}$$

Ce gain est important dans le cas des pupilles annulaires où γ est très bas et où la valeur quadratique moyenne de $\gamma(v)$ demeure inférieure à $1/\gamma$. Par exemple, dans le cas de l'apodiseur $T'(r)$ obturé au taux 0,3, on a :

$$\gamma = 0,398 \quad \text{et} \quad \sqrt{\overline{\gamma^2(v)}} = 0,343 \quad . \text{ Le gain est alors } \frac{L'_r}{L_r} = 7,3 .$$

Lorsqu'il s'agit d'une convolution que seule la méthode à postériori peut donner, comme par exemple dans le cas du passage d'une fonction d'appareil de pupille annulaire à une fonction d'appareil de pupille circulaire, la luminosité L'_r reste en général voisine de l'unité lorsque la moyenne quadratique de

$$\gamma(v) = \frac{G_n(v)}{G_{on}(v)} \quad \text{reste voisine du quotient des valeurs}$$

moyennes de G_n et de G_{on} , ce qui représente un cas fréquent.

Cette méthode de correction est donc très intéressante.

CONCLUSION

J'ai considéré le problème de l'amélioration des figures de diffraction sous l'angle d'une modification de la fonction de transfert de l'appareil et j'ai été amené à envisager, notamment dans le cas des pupilles obturées, des corrections d'un type plus général que celles que peuvent produire des pupilles absorbantes.

J'ai étudié dans toute leur généralité les corrections qu'on pouvait effectuer sur la fonction de transfert afin de corriger la fonction d'appareil. Cela m'a amené à différentes études concernant la fonction de transfert elle-même : étude théorique, j'ai étudié les principales propriétés ; étude expérimentale, j'ai dû mettre au point une mesure des fonctions de transfert complexes et j'ai utilisé cette méthode pour déterminer la variation de phase par transmission introduite par une lame mince métallique. Ceci constitue une donnée très utile pour la détermination des constantes optiques des métaux en couches minces.

En ce qui concerne les corrections, j'ai montré, que la correction par écrans apodisants donnait de bons résultats dans le cas des pupilles circulaires tandis que dans le cas des pupilles obturées il était de beaucoup préférable de corriger la fonction d'appareil en la convoluant avec une fonction correctrice, à la fois au point de vue des résultats et au point de vue du rapport signal sur bruit.

En application de cette dernière méthode, j'ai proposé des solutions précises. J'ai montré que leur mise en oeuvre peut être rapide et aisée dans certains cas comme celui des objets lignés ou des spectres de raies.

Je voudrais finalement noter que ce type de corrections pourrait être généralisé. J'ai envisagé de modifier des fonctions d'appareil qui ne dépendaient que des phénomènes de diffraction mais on pourrait très bien envisager de la même façon la correction de fonctions d'appareil qui seraient altérées par une autre cause, par des aberrations en particulier. L'étude des propriétés des fonctions correctrices accessibles dans ce cas constituerait un prolongement intéressant du présent travail.

- 1 JACQUINOT (P) et ROIZEN-DOSSIER (B), Progress in Optics, 1964, vol III, E. Wolf, Ed. North Holland, Amsterdam.
- 2 DOSSIER (B), Recherches sur l'apodisation des images optiques, Thèse, Paris 1954.
- 3 GIACOMO (P), ROIZEN-DOSSIER (B) et ROIZEN (S), J. Physique, 1964, 25, 285.
- 4 FOUSSE (H) et ROIZEN-DOSSIER (B), J. Physique, 1964, 25, 24.
- 5 HOPKINS (H.H), Opt. Acta, 1955, 2, 23.
- 6 BAKER (L.R), Proc. Phys. Soc. B, 1955, 68, 871.
- 7 KELSALL (D), Proc. Phys. Soc., 1959, 73, 465.
- 8 MARECHAL (A) et FRANCON (M), Traité d'optique instrumentale, tome II, 1960, Ed. Rev. Opt., Paris.
- 9 SHADE (O), N.B.S. Circular 526, 1951, 183.
- 10 ROSENHAUER (K) et ROSENBRUCH (K.J), Opt. Acta, 1957, 4, 21.
Opt. Acta, 1959, 6, 234.
- 11 LOHMANN (A), Optik, 1957, 14, 510.
- 12 LACOMME (P), Acta Electronica, 1957, 2, 263.
- 13 INGLESTAM (E), DJURLE (E) et SJOGREN (B), J.O.S.A., 1956, 46, 707.
- 14 SHANNON (R.R) et NEWMAN (A.H), Applied Optics, 1963, 2, 365.
- 15 LINDBERG (P.J), Opt. Acta, 1954, 1, 30.
- 16 SUZUKI (J), Technology raport of Osaka University, 1957, 7, N° 269.
- 17 MURATA (K) et MATZUI (H), J. Applied Physics, Japan, 1956, 25, 456.

- 18 HACKING (K), Nature, 1953, 181, 1158.
- 19 LACOMME (P), Opt. Acta, 1960, 7, 331.
- 20 HOPKINS (H.H), Proc. Roy. Soc., 1955, 231, 91.
- 21 CASSET (J), Rev. Opt., 1964, 4, 161.
- 22 O'BRYAN (H.M), J.O.S.A., 1936, 26, 122.
- 23 SCHULZ (L.G) J.O.S.A., 1954, 44, 357.
- 24 SCHULZ (L.G) et TANGHERLINI (F.R), J.O.S.A., 1954, 44, 362.
- 25 ABELES (F), J.O.S.A., 1957, 47, 473.
- 26 DOSSIER (B), BOUGHON (P) et JACQUINOT (P), J1 Rech. C.N.R.S.,
1950, 11, 49.
- 27 ROIZEN-DOSSIER (B), Proc. Of a Symp. on Astr. Optics,
North Holland Publ. Co, Amsterdam, 1956, 163.
- 28 WILD (J.P), Proc. Roy. Soc. A, 1961, 262, 84.
- 29 JACQUINOT (P) et ROIZEN-DOSSIER (B), C.R.Ac.Sc., 1963, 256, 4384.
- 30 CONNES, Thèse, Rev. Opt., 1959, 38, 157.

DEUXIEME THESE

Proposition donnée par la Faculté

La transformée de FOURIER en microscopie par contraste
de phase.

$\frac{1}{x^{\frac{7}{8}}} = x^{-\frac{7}{8}}$

Nom de l'étudiant : FOUSSE Henri

Nature de la Thèse : Doctorat d'Etat

Titre de la Thèse : "La fonction de transfert des fréquences spatiales
en apodisation".

Vu et Approuvé

NANCY, le 26 Mai 1966

Le Doyen

J. AUBRY

Vu et Permis d'Imprimer

NANCY, le 27 Mai 1966

le Recteur

Président du Conseil de

l'Université

P. IMBS

